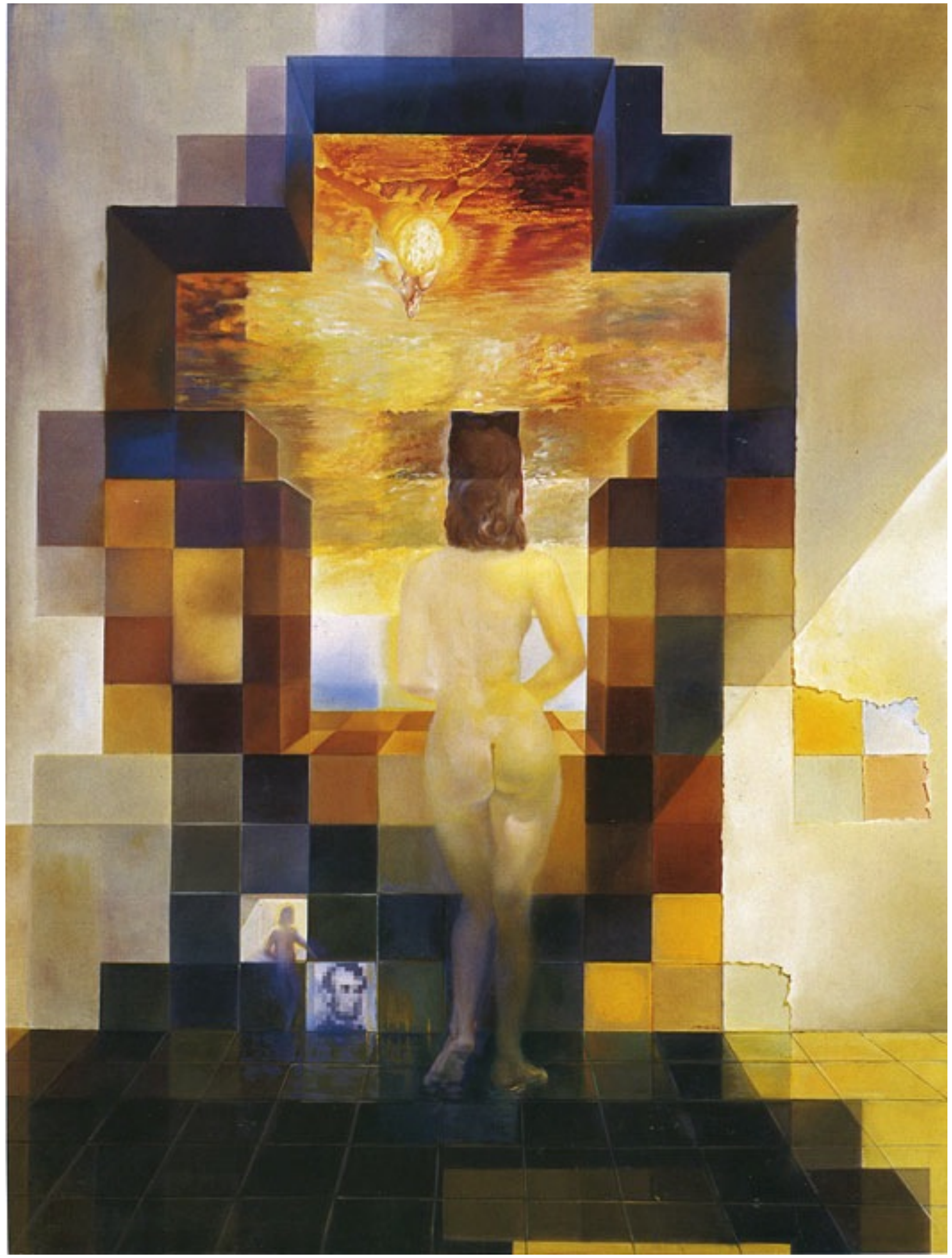
Filtrage spectral



GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique, Hiver 2016

Jean-François Lalonde

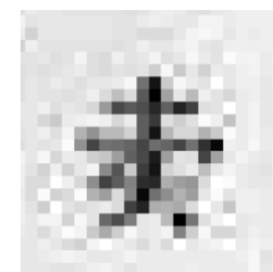
Merci à: Alyosha Efros, Derek Hoiem, Steve Seitz, et Steve Marschner!

Administration

- TP1: comment ça été?
- TP2: disponible aujourd’hui!
  - À remettre le 22 février (dans 2 semaines) @ 23h59
  - On s’en reparle à la fin du cours

La semaine dernière…

- Une image est une matrice de nombres
  - Souvent mieux de travailler sur la luminance



=

0.9	0.93	0.94	0.97	0.62	0.37	0.85	0.97	0.93	0.92	0.9
0.9	0.89	0.82	0.89	0.56	0.31	0.75	0.92	0.81	0.95	0.9
0.8	0.72	0.51	0.55	0.51	0.42	0.57	0.41	0.49	0.91	0.9
0.9	0.95	0.88	0.94	0.56	0.46	0.91	0.87	0.90	0.97	0.9
0.7	0.81	0.81	0.87	0.57	0.37	0.80	0.88	0.89	0.79	0.8
0.4	0.62	0.60	0.58	0.50	0.60	0.58	0.50	0.61	0.45	0.3
0.8	0.84	0.74	0.58	0.51	0.39	0.73	0.92	0.91	0.49	0.7
0.9	0.67	0.54	0.85	0.48	0.37	0.88	0.90	0.94	0.82	0.9
0.6	0.49	0.56	0.66	0.43	0.42	0.77	0.73	0.71	0.90	0.9
0.7	0.73	0.90	0.67	0.33	0.61	0.69	0.79	0.73	0.93	0.9
0.9	0.94	0.89	0.49	0.41	0.78	0.78	0.77	0.89	0.99	0.9

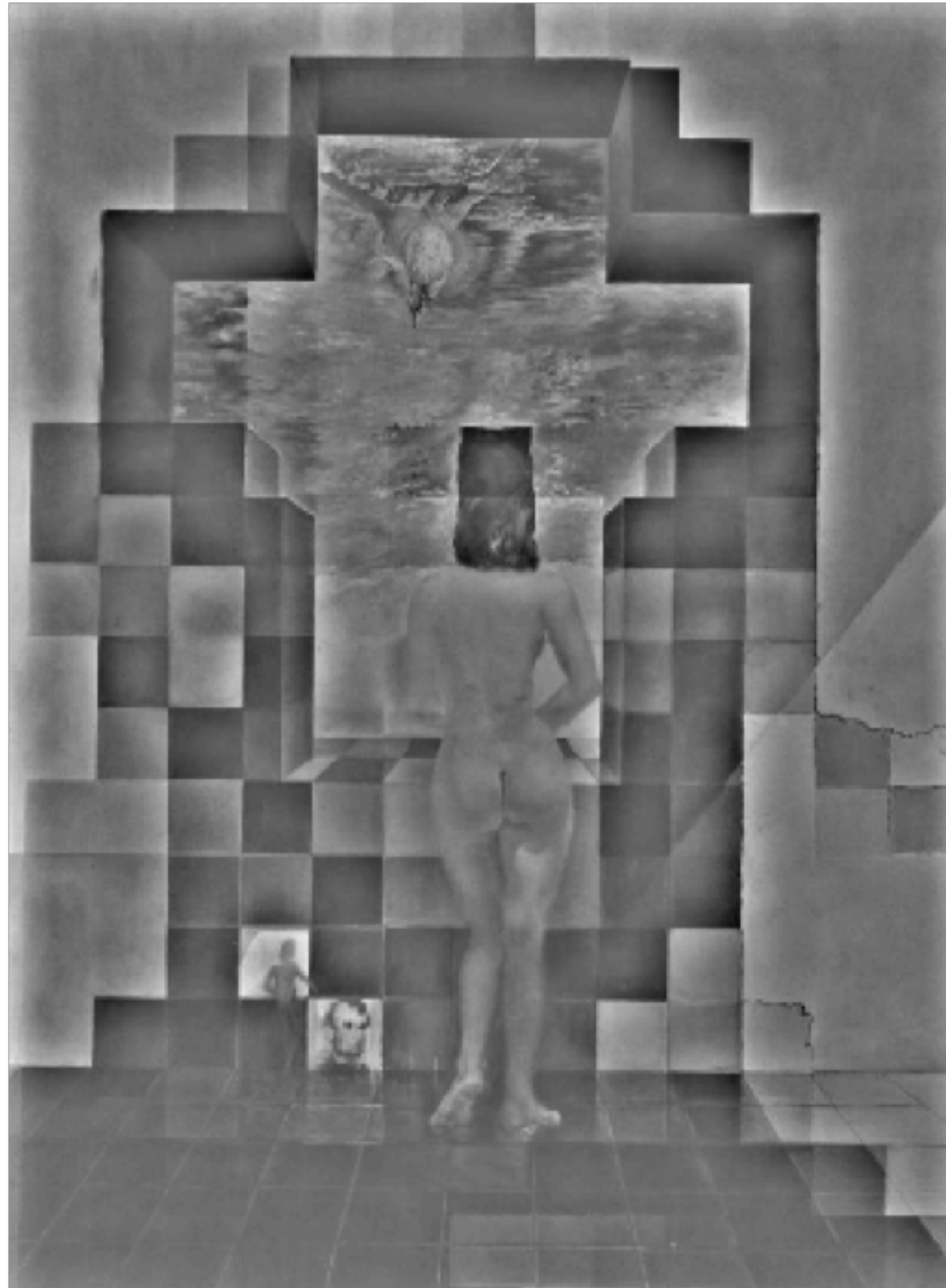
- Opérations sur les pixels
  - Égalisation d'histogramme
- Filtrage linéaire
  - Peut adoucir, accentuer, identifier les arrêtes horizontales/verticales

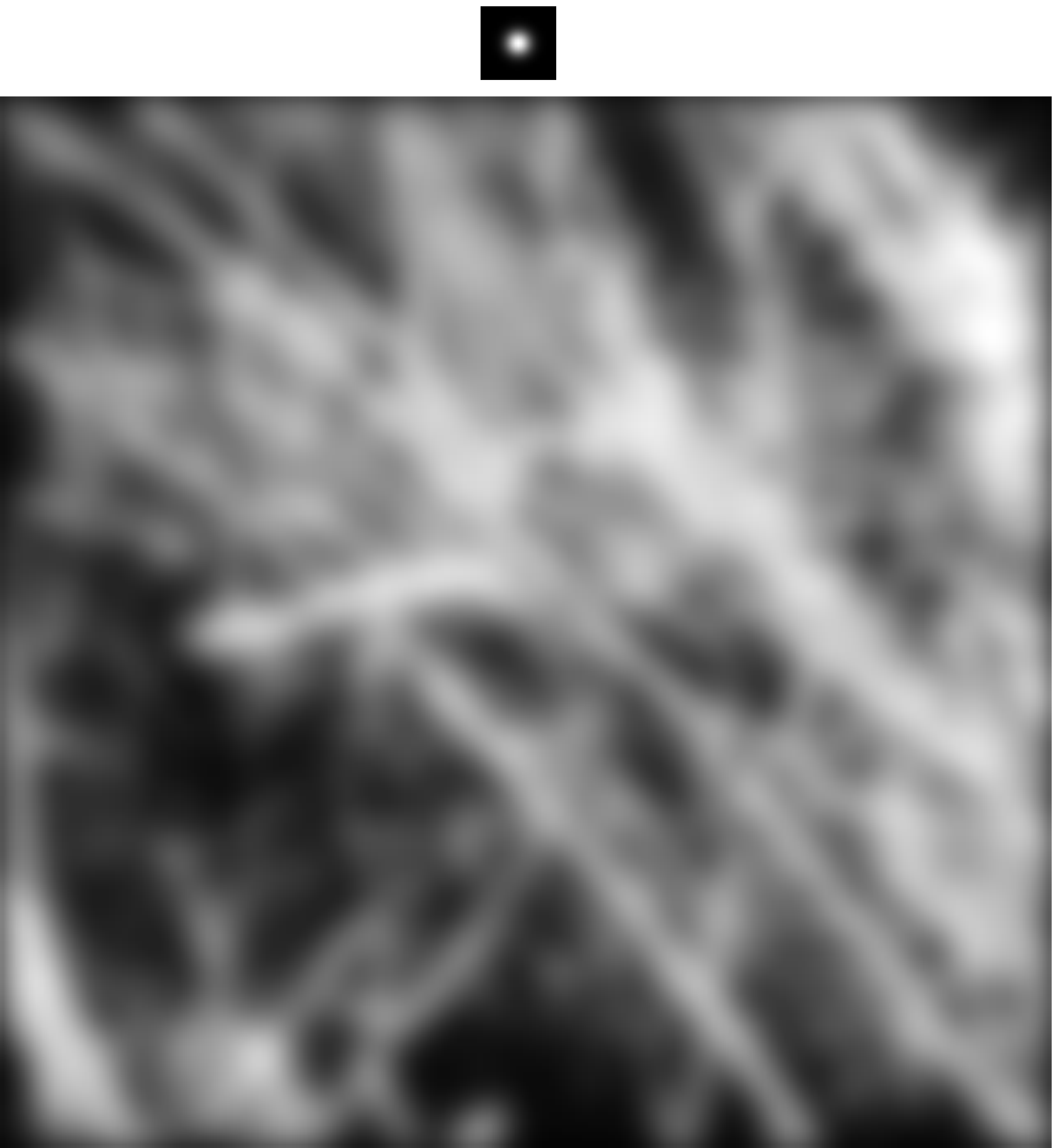
$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Aujourd’hui

- Retour sur le filtre gaussien
- La transformée de Fourier et le domaine spectral
  - Autre dimension du filtrage: domaine spectral
  - Échantillonnage
  - Applications du filtrage

Salvador Dali
“Gala contemplant la mer Méditerranée qui à vingt mètres devient le portrait d'Abraham Lincoln ”, 1976





- Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible? Quelle est l'information perdue?

Image: http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/

La transformée de Fourier

(sans se faire mal)

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

- a eu une idée révolutionnaire (1807):
  - Toute fonction peut être écrite comme une somme pondérée de sinus et cosinus de différentes fréquences
- Vous n'y croyez pas?
  - Lagrange, Laplace, Legendre et autres non plus!
  - Pas traduit en anglais jusqu'à 1878!

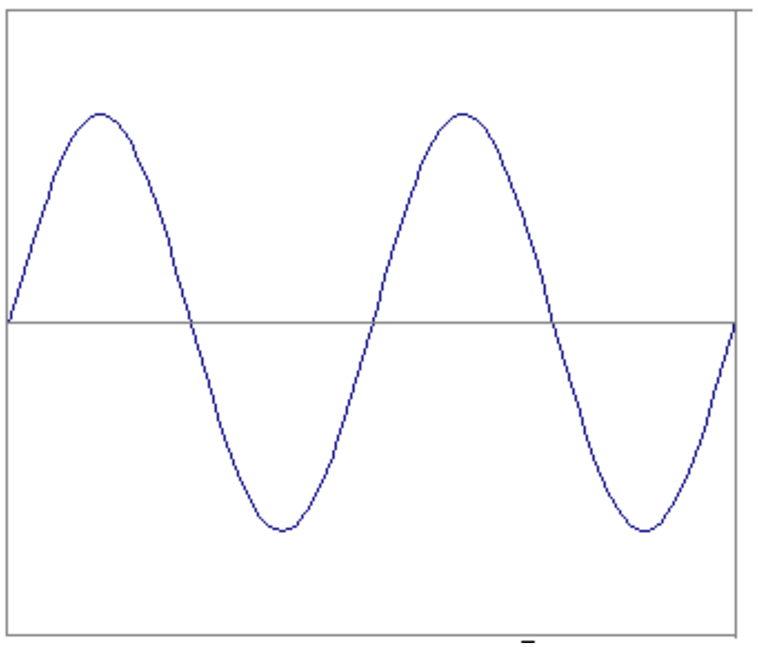
Source: Efros

La transformée de Fourier

- Toute fonction peut être écrite comme une somme pondérée de sinus de différentes fréquences

Notre “unité” de base:

$$\underset{\text{amplitude}}{A} \sin(\underset{\text{fréquence}}{\omega} x + \underset{\text{phase}}{\Phi})$$



Qu’est-ce qui contrôle
- la structure générale?
- les détails?

La transformée de Fourier

- Nous voulons comprendre la fréquence ω de notre signal.
  - Exprimons alors le signal avec ω au lieu de x:

$f(x) \longrightarrow$ Transformée de Fourier $\longrightarrow F(\omega)$

- représente la magnitude et la phase à chaque fréquence
  - Magnitude: “quantité” de signal à chaque fréquence
  - Phase: translation horizontale

La transformée de Fourier

- F(ω) représente l'amplitude *et* la phase du signal
    - Comment faire pour représenter ces deux informations?
    - On utilise les nombres complexes

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega)$$

- Où l'amplitude est: $A = \pm\sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$
- Et la phase: $$\Phi = \tan^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

Transformée de Fourier

- Directe

$f(x) \longrightarrow$ Transformée de Fourier $\longrightarrow F(\omega)$

- Inverse

$F(\omega) \longrightarrow$ Transformée de Fourier Inverse $\longrightarrow f(x)$

Calculer la transformée de Fourier

$$H(\omega) = \mathcal{F}\left\{h(x)\right\} = Ae^{j\phi}$$

Continue

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-j\omega x}dx$$

Discrète

$$H(k) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} h(x)e^{-j\frac{2\pi kx}{N}}$$

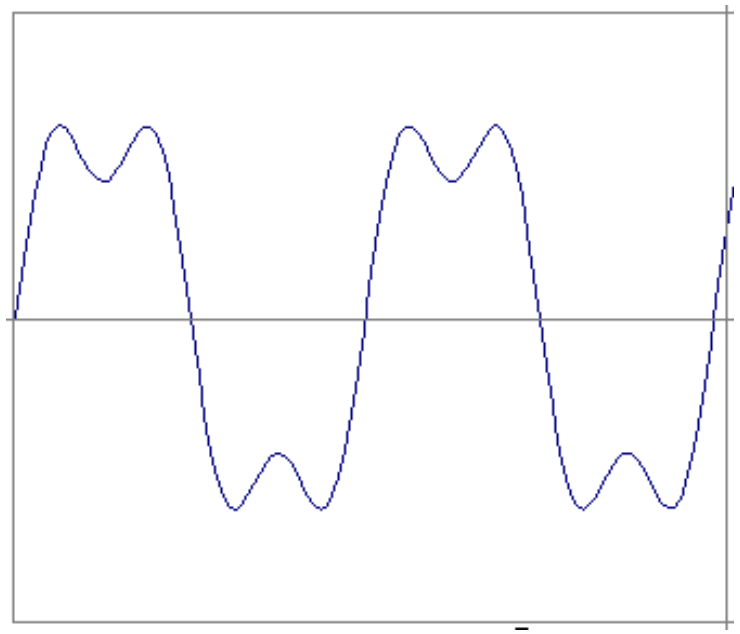
k=-N/2..N/2

(pour s'en souvenir)

Fast Fourier Transform (FFT): NlogN

Spectre en fréquences

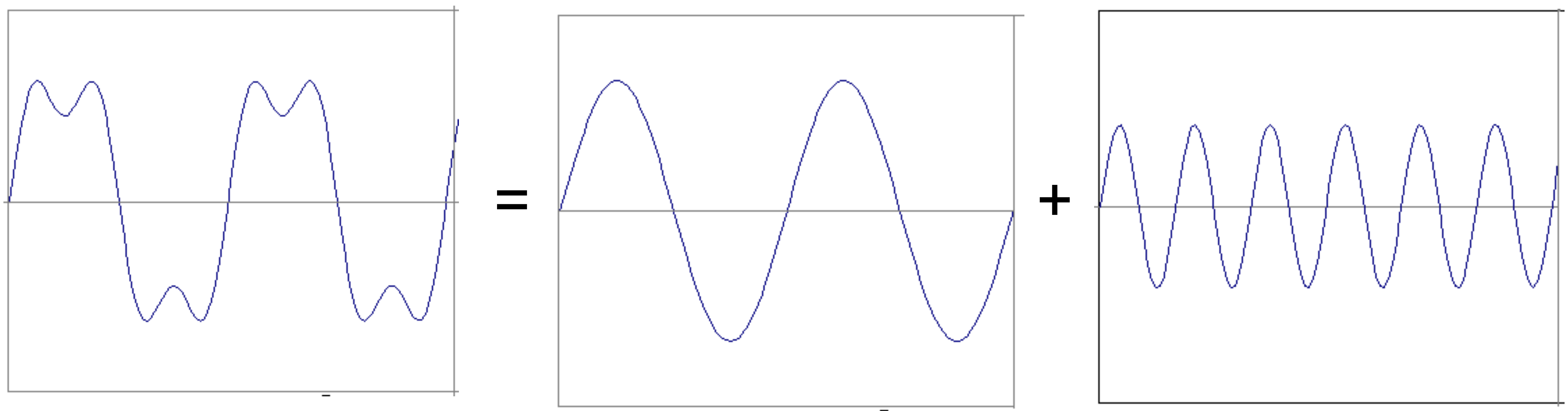
- exemple : $g(t) = \sin(2\pi f\, t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)\, t)$



Efros

Spectre en fréquences

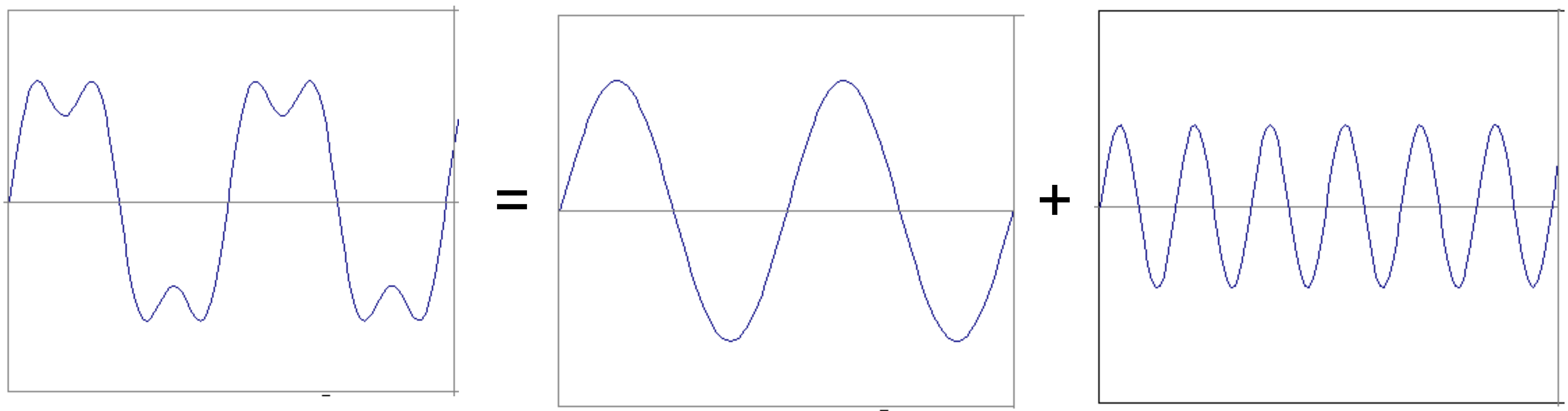
- exemple : $g(t) = \sin(2\pi f\ t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)\ t)$

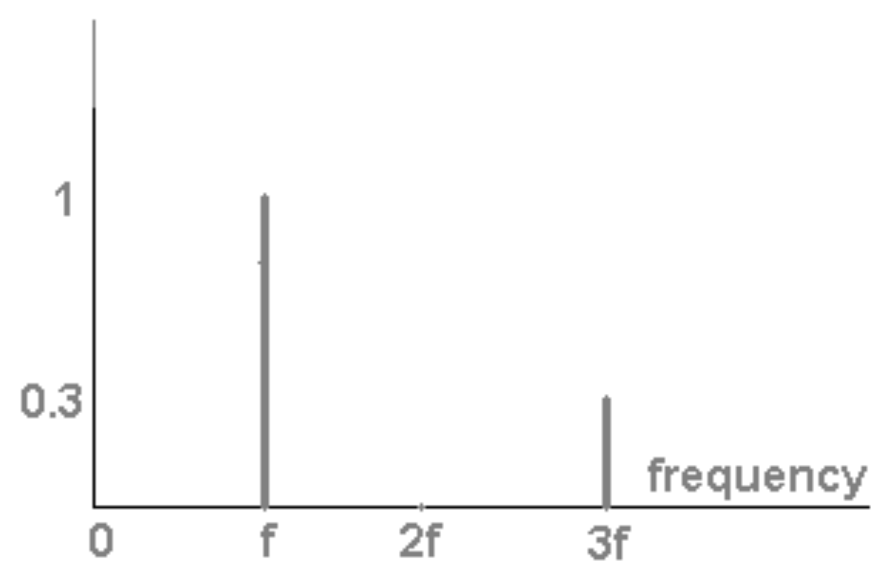


Efros

Spectre en fréquences

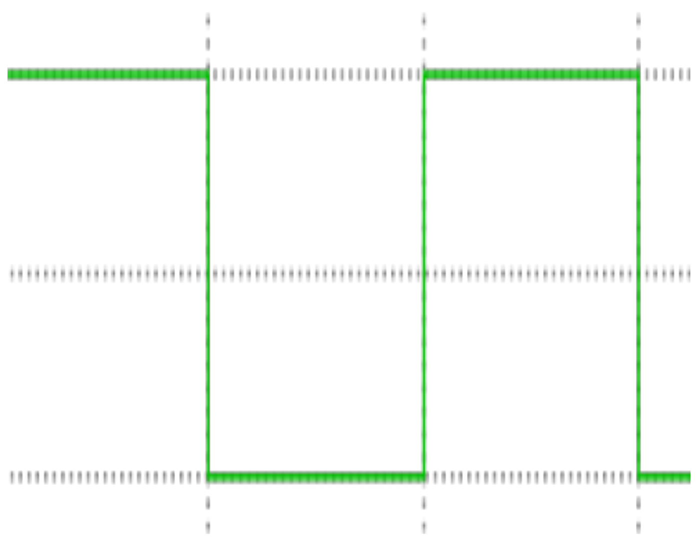
- exemple : $g(t) = \sin(2\pi f\ t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)\ t)$



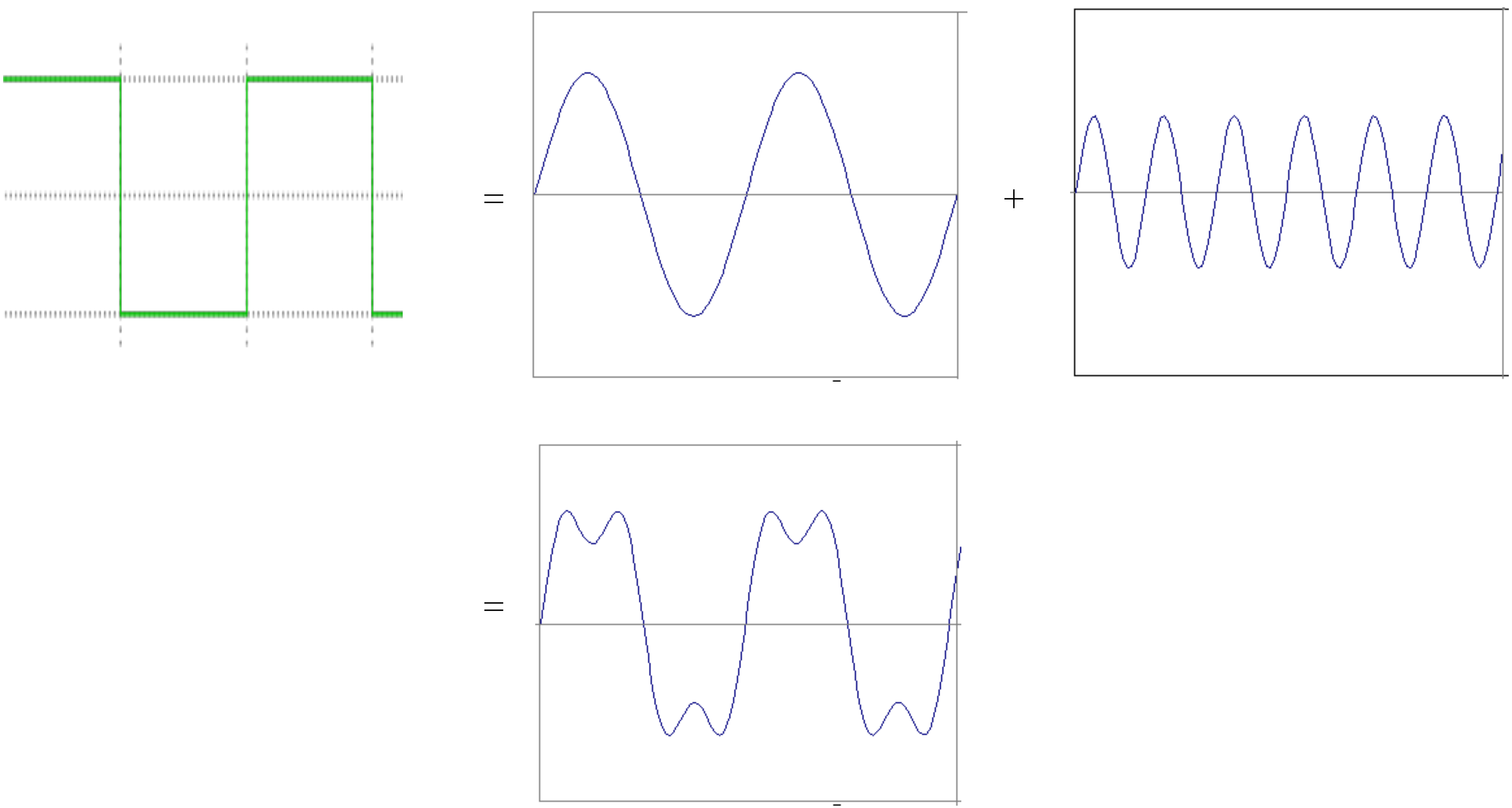


Efros

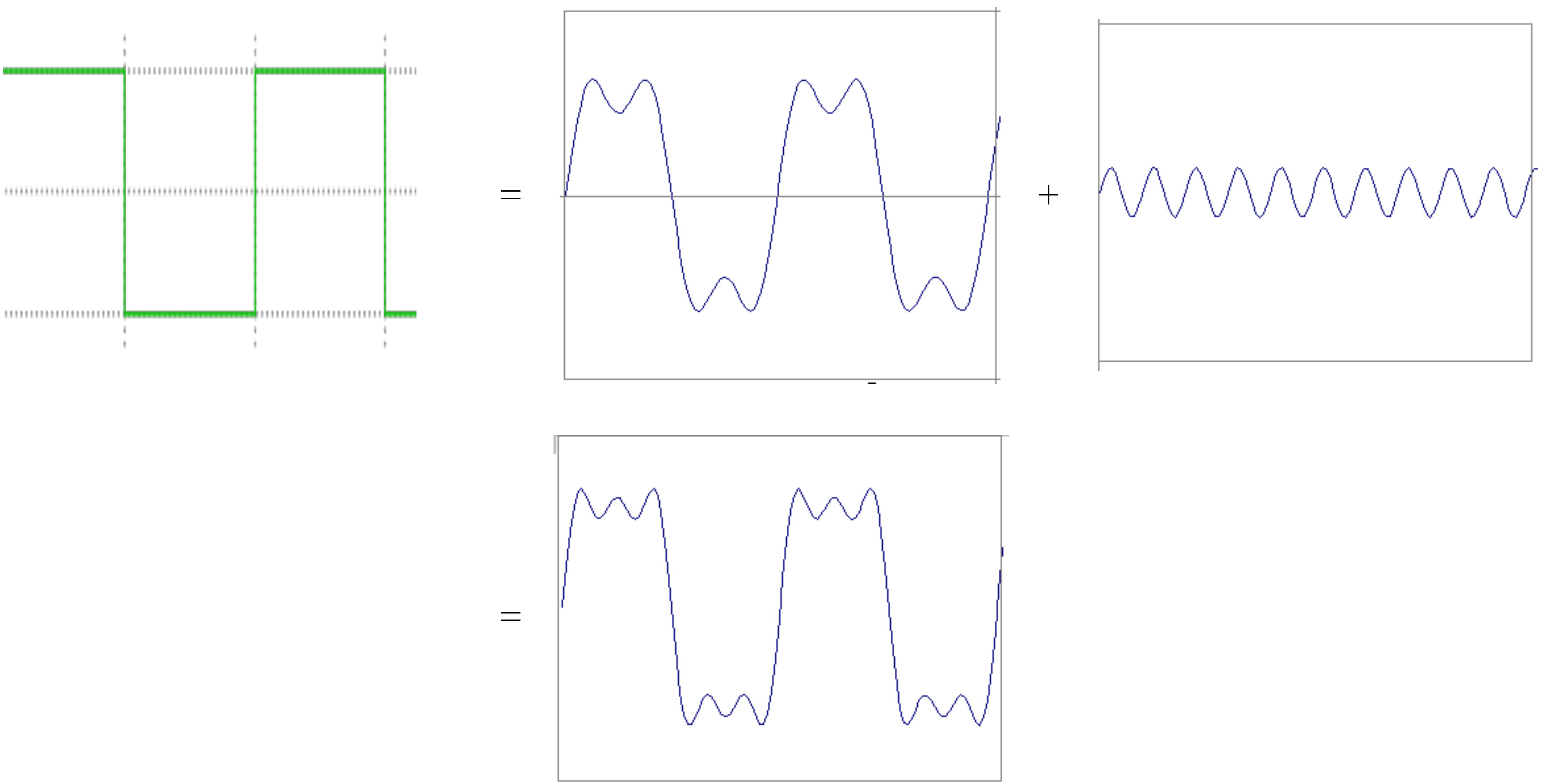
Spectre en fréquences



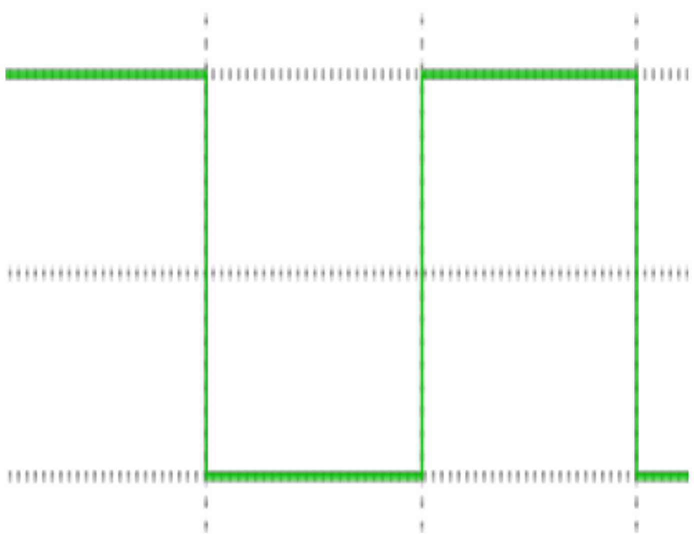
Spectre en fréquences



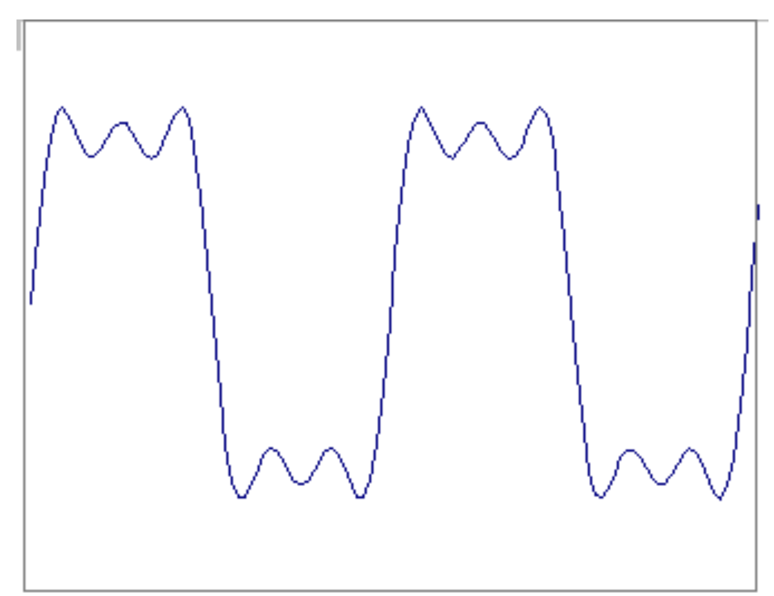
Spectre en fréquences



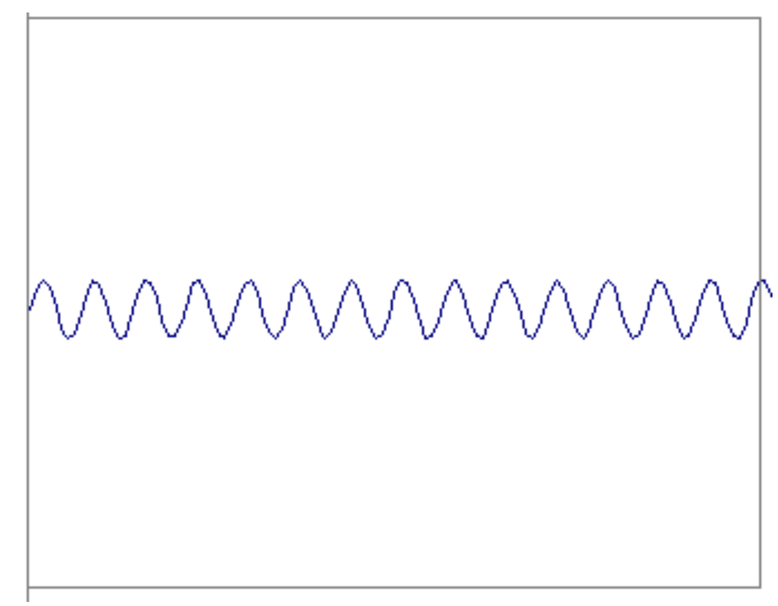
Spectre en fréquences



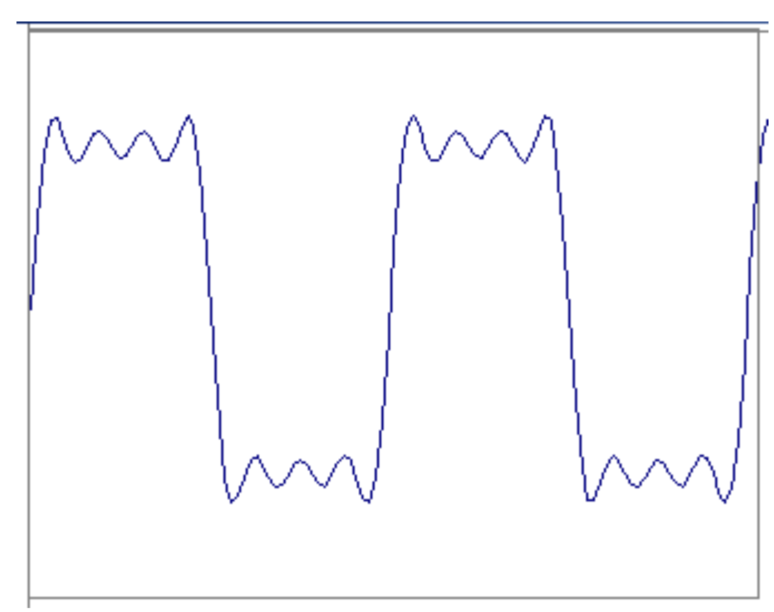
=



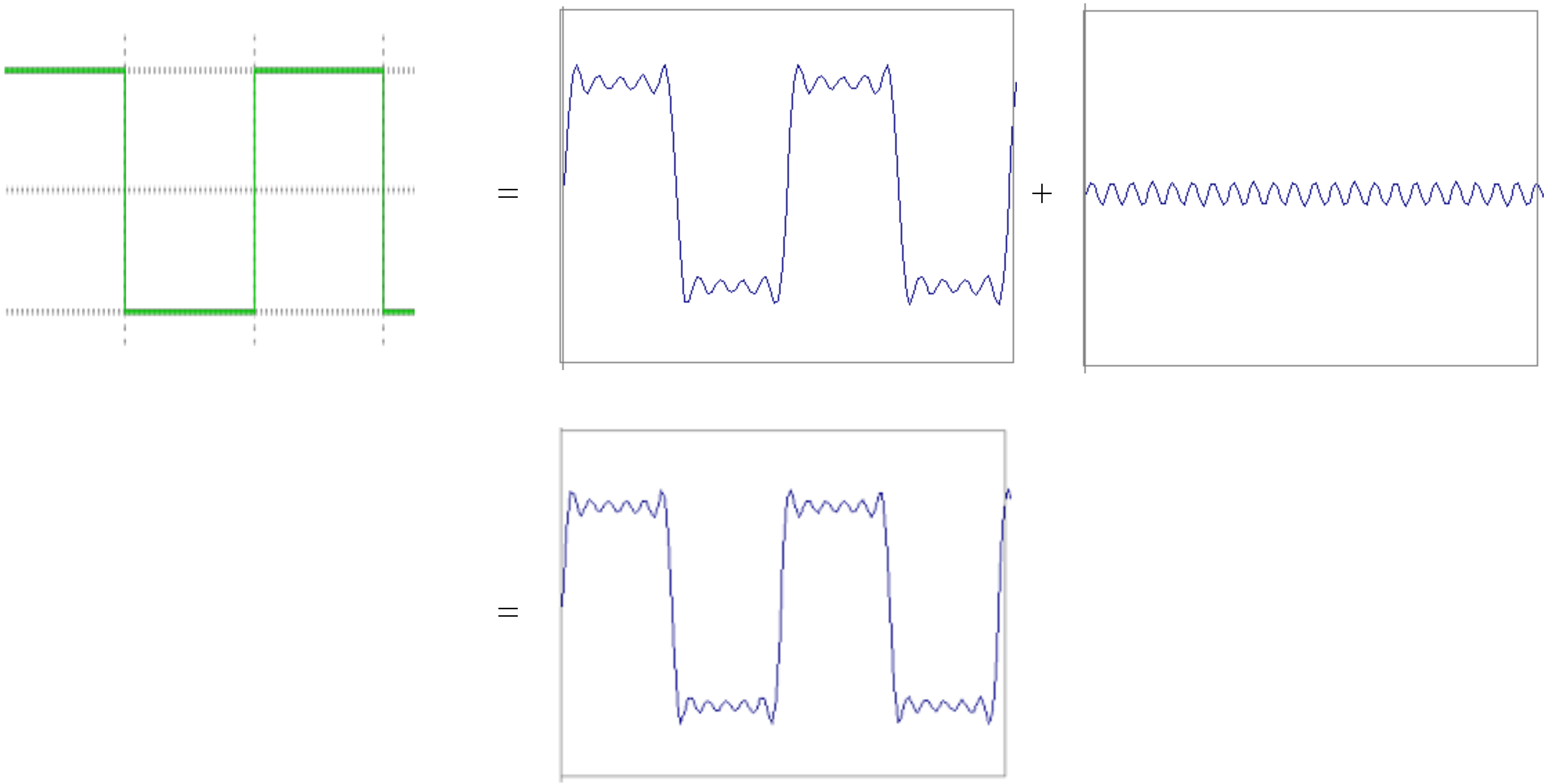
+



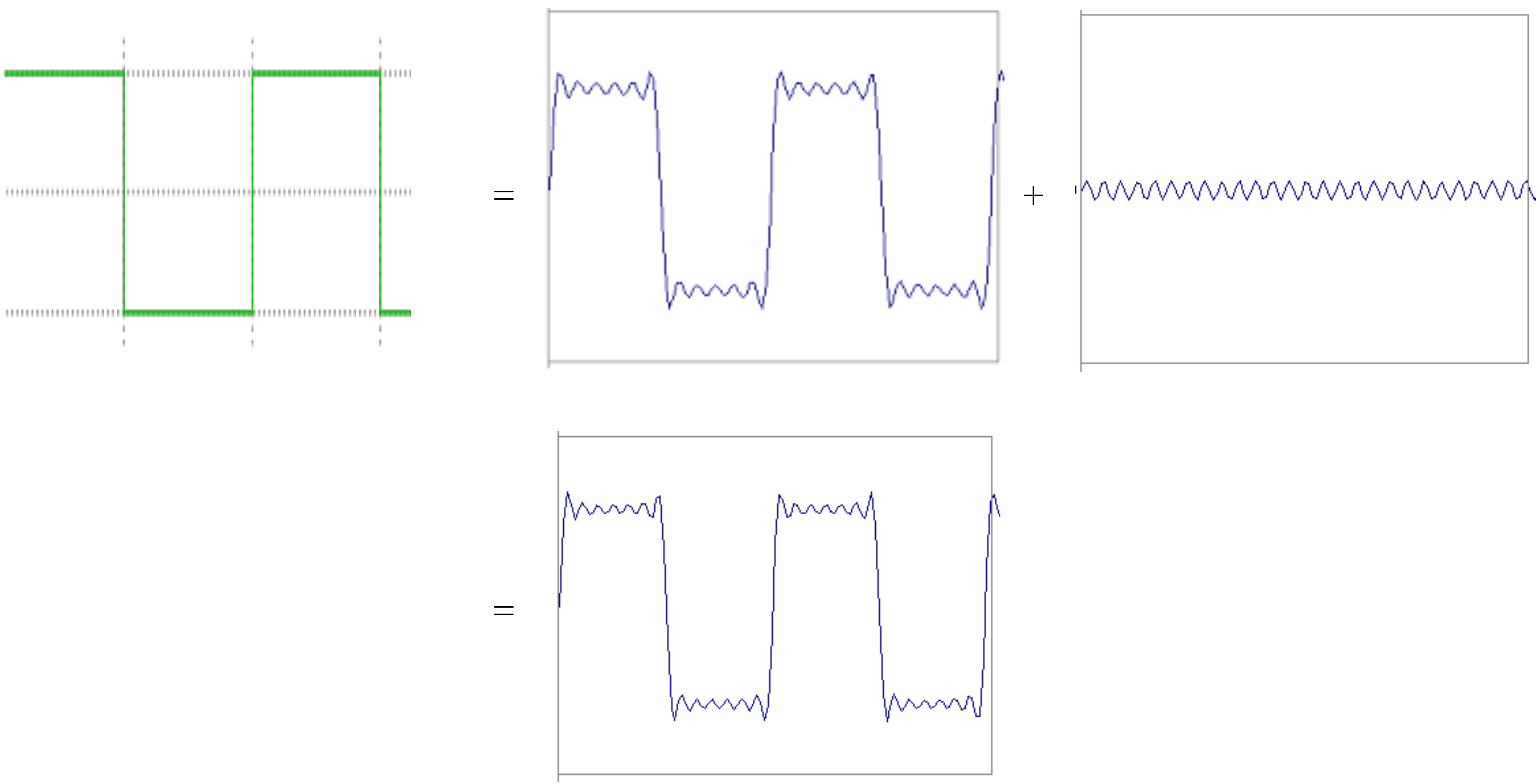
=



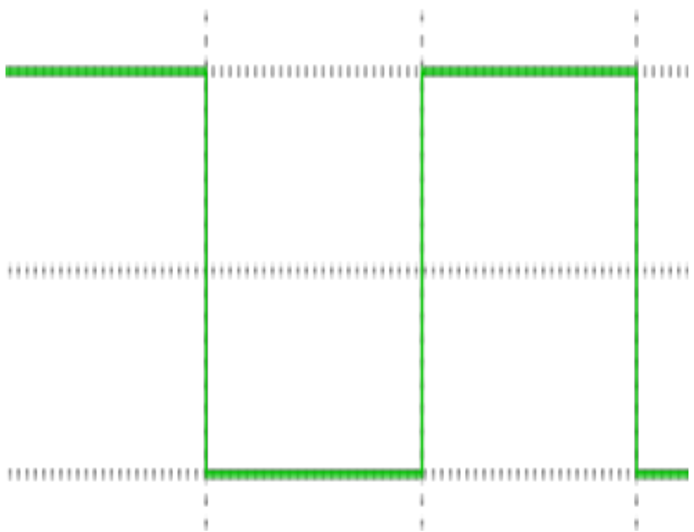
Spectre en fréquences



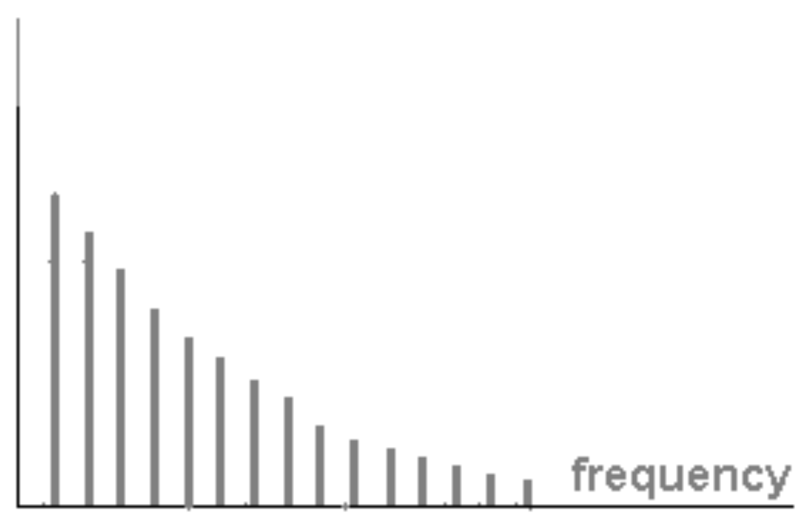
Spectre en fréquences



Spectre en fréquences

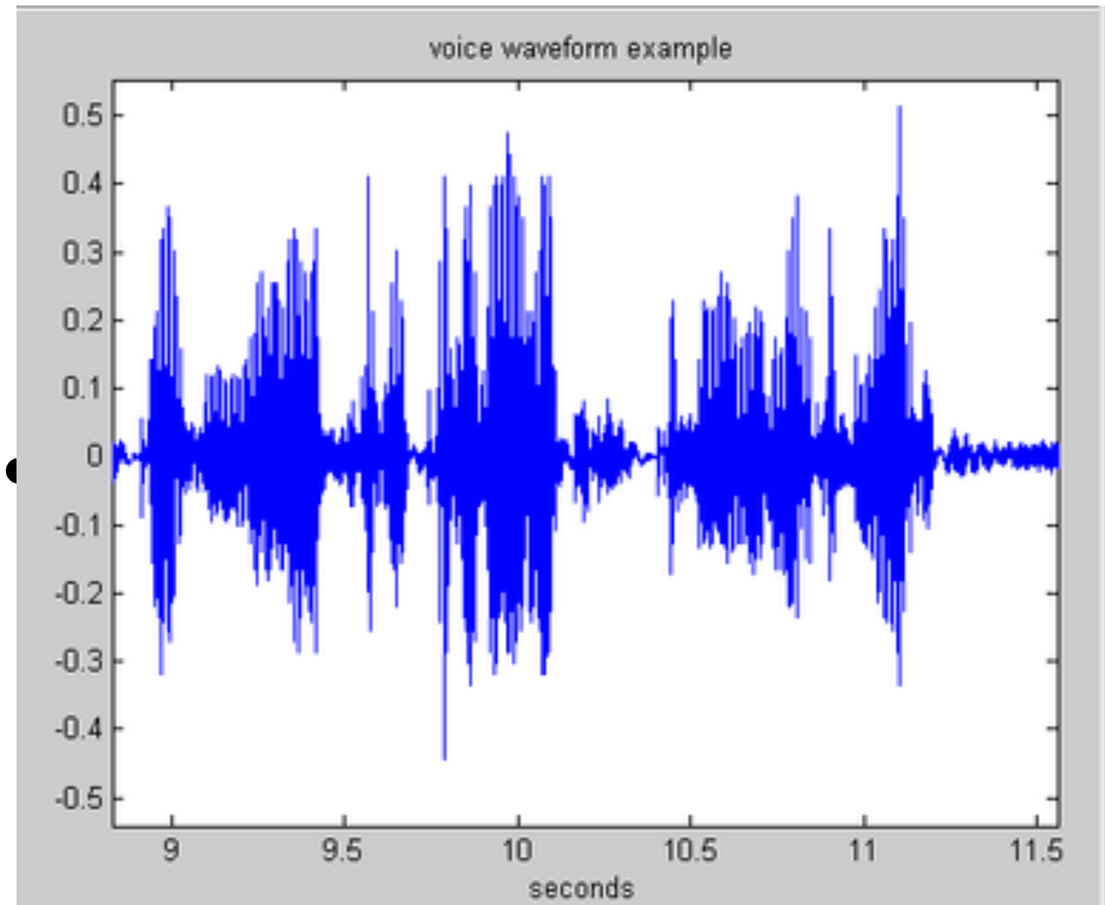


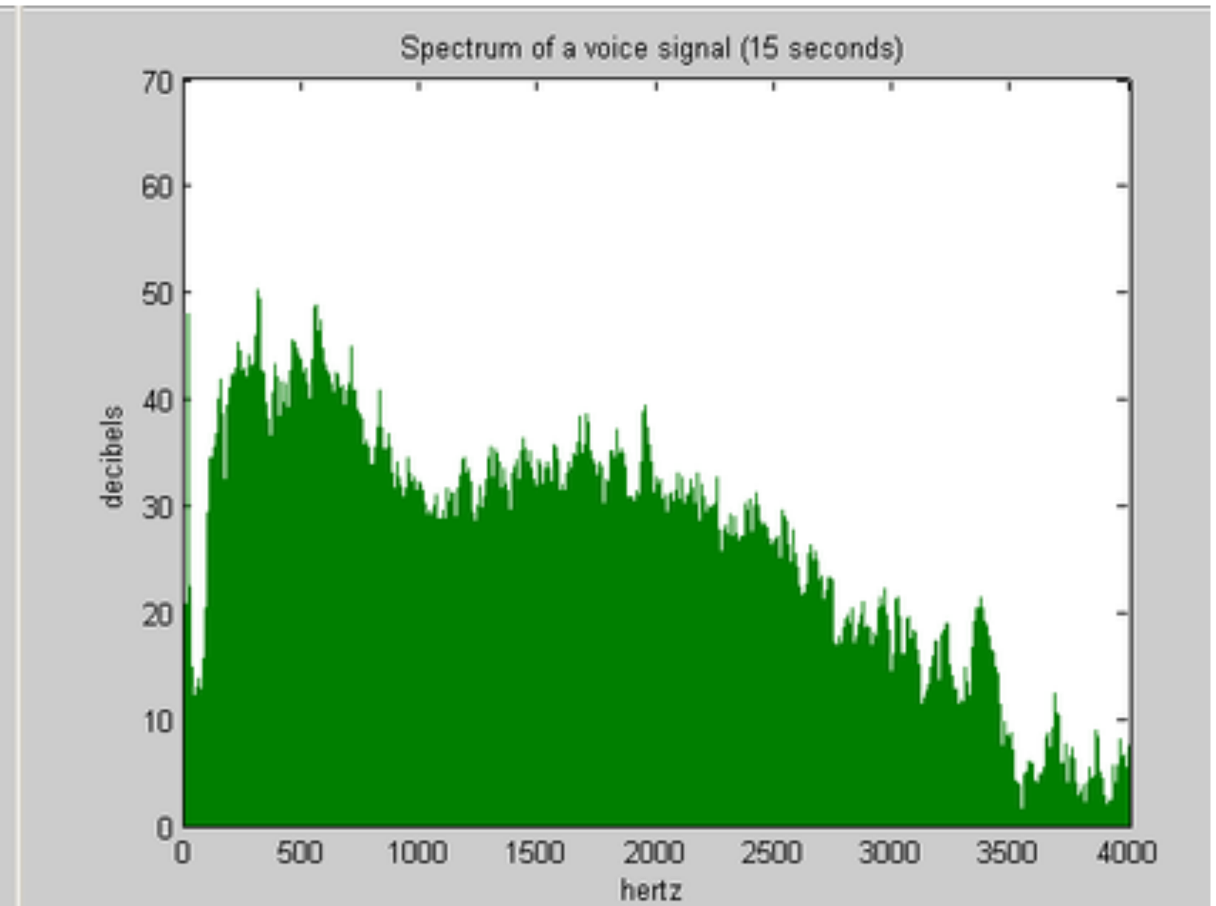
$$= \quad A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2\pi kt)$$



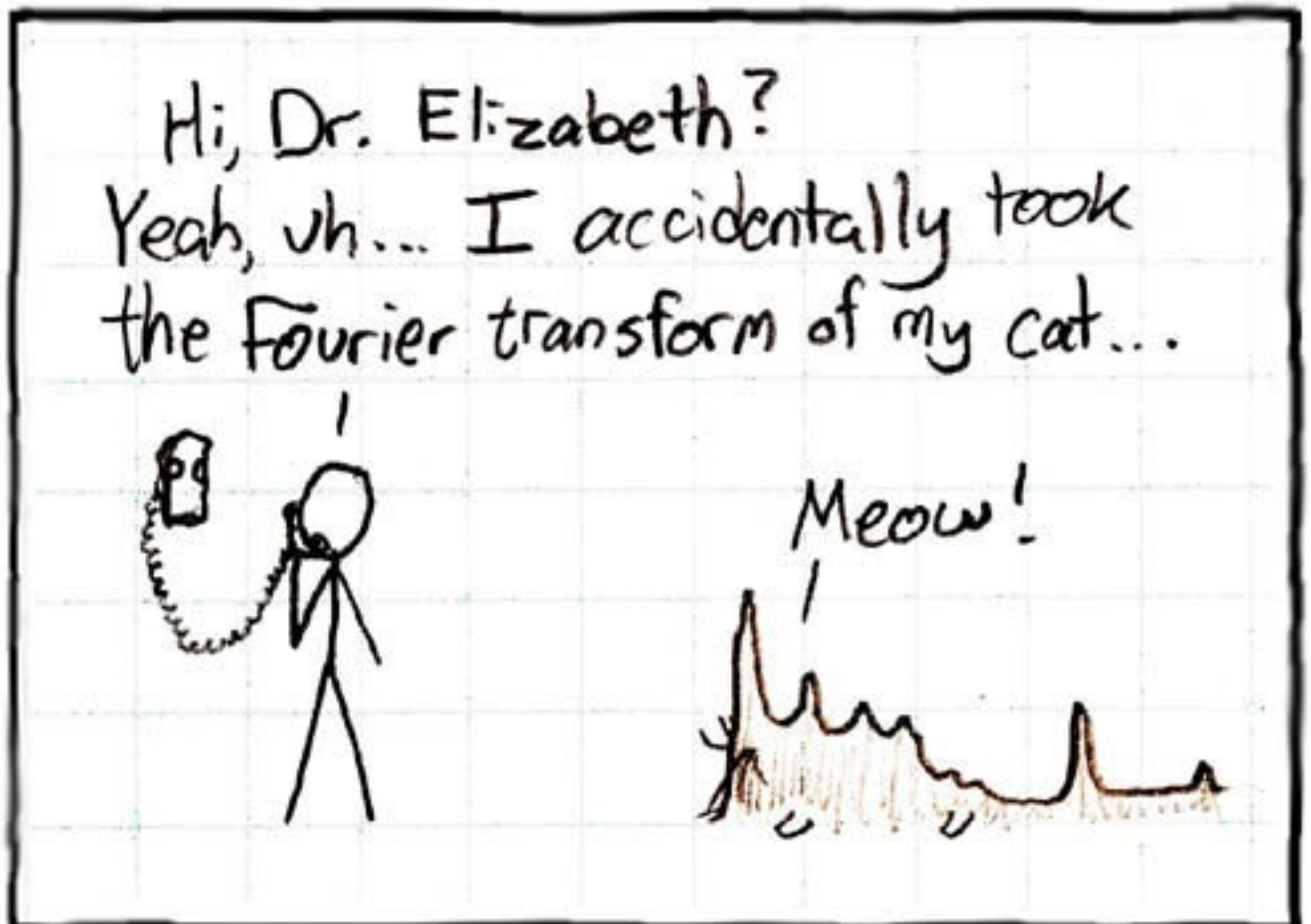
Exemple: musique

•





Autres signaux

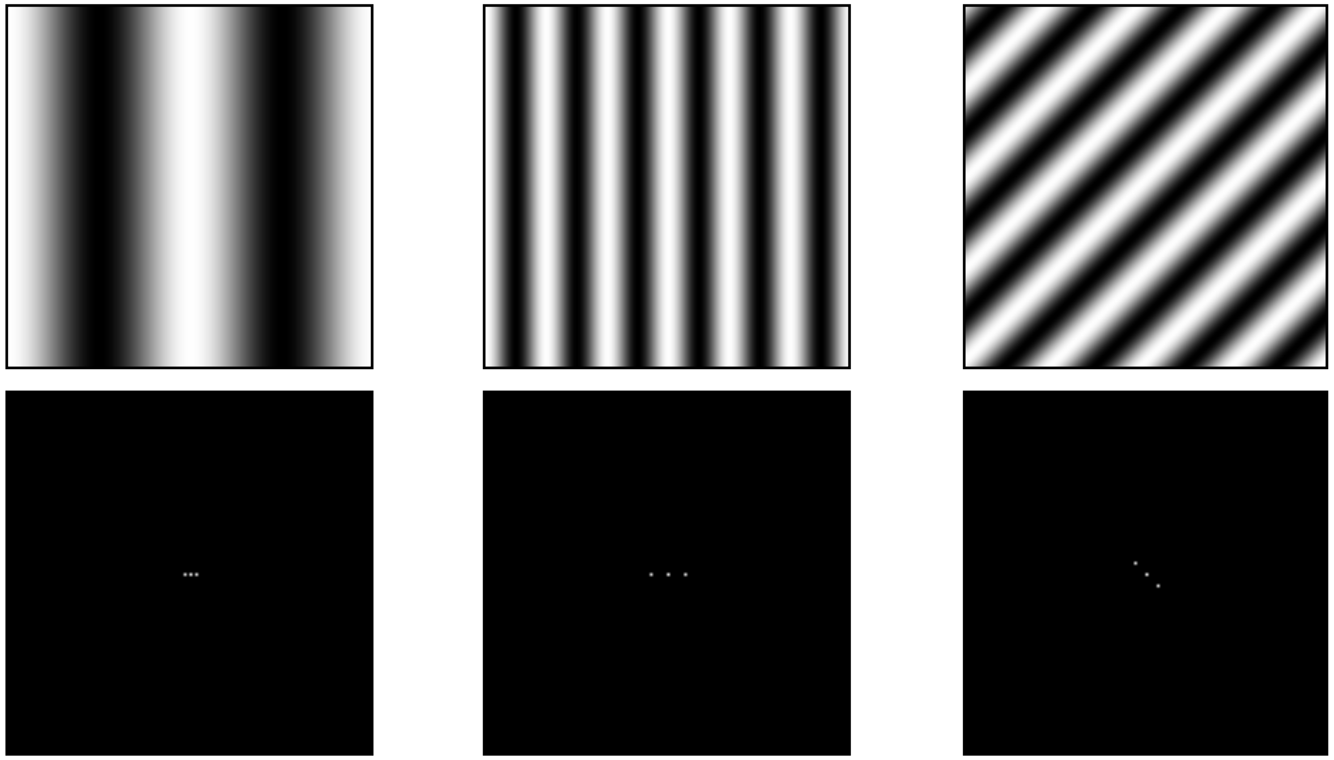


xkcd.com

Transformée de Fourier dans les images

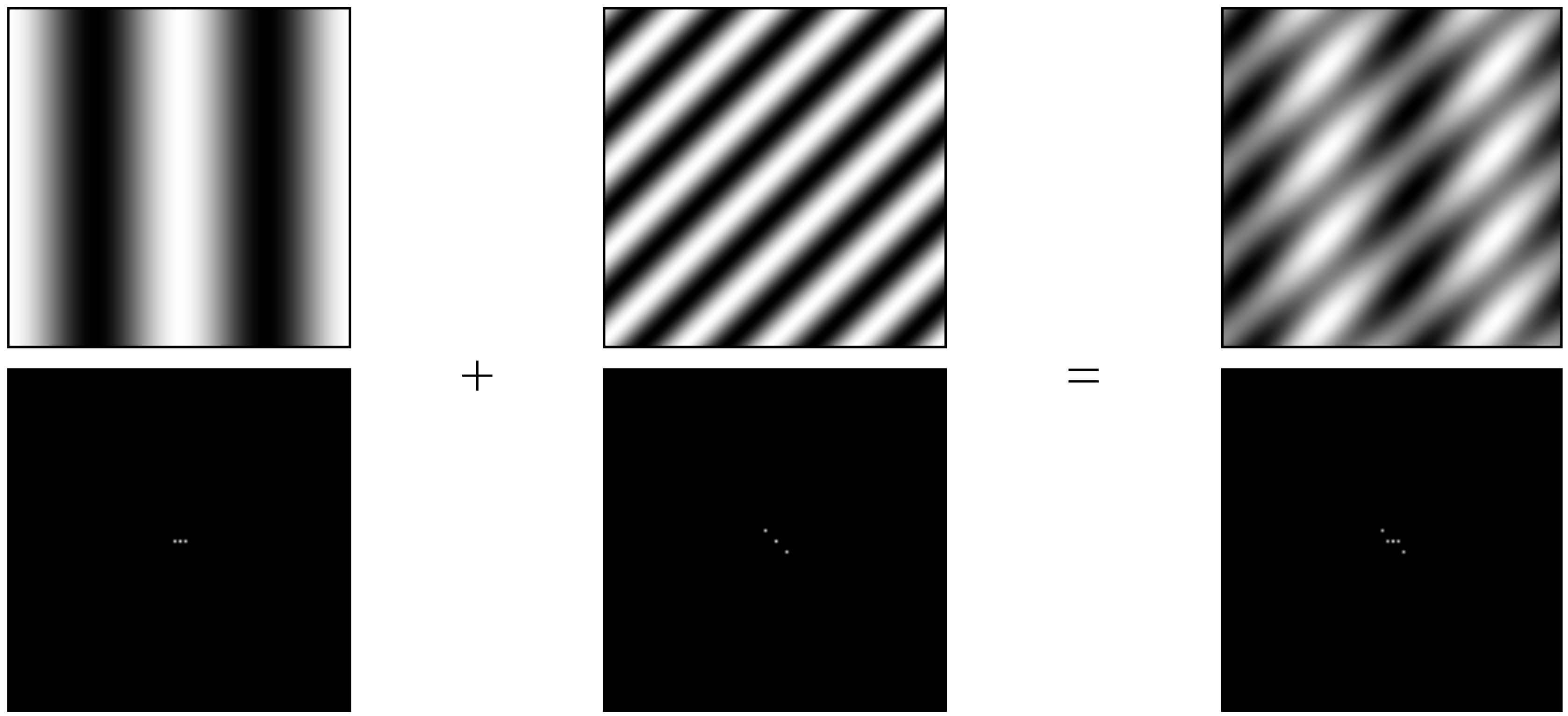
Image

Transformée de Fourier



http://sharp.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html#filtering

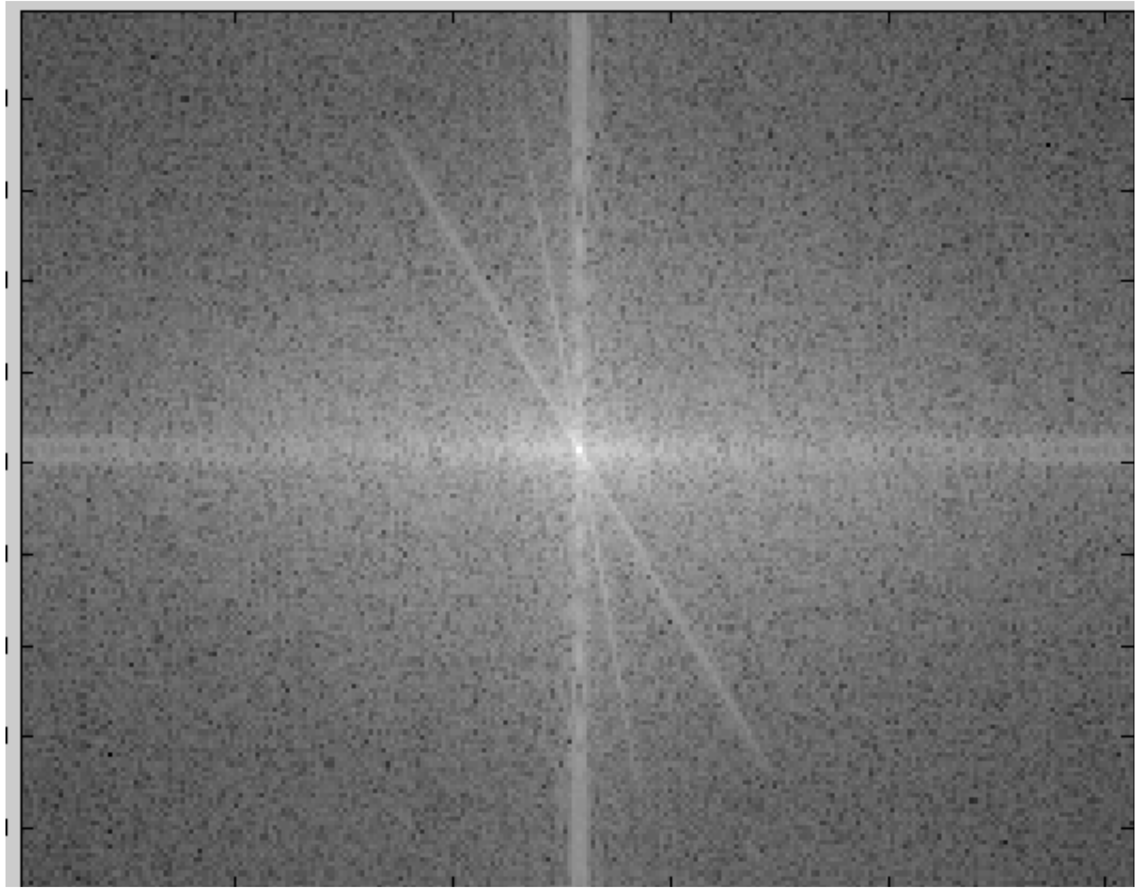
On peut composer les images



http://sharp.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html#filtering
http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

Démonstration

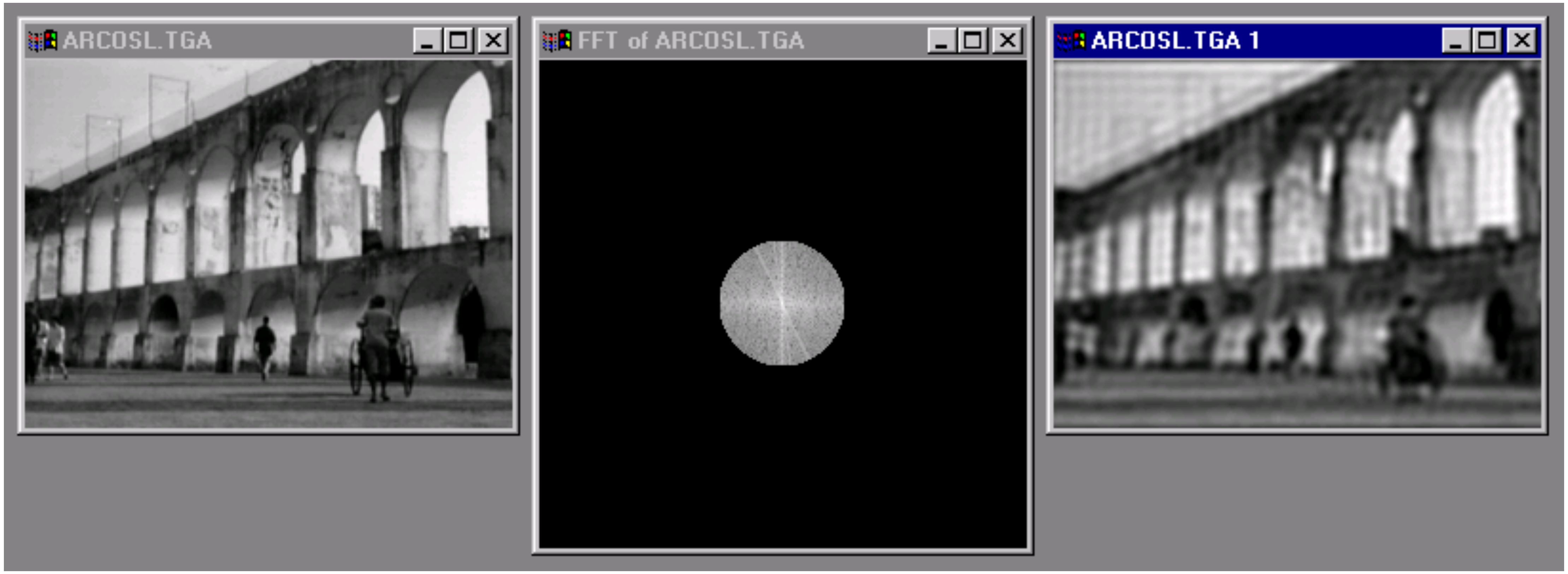
Calculer une FFT

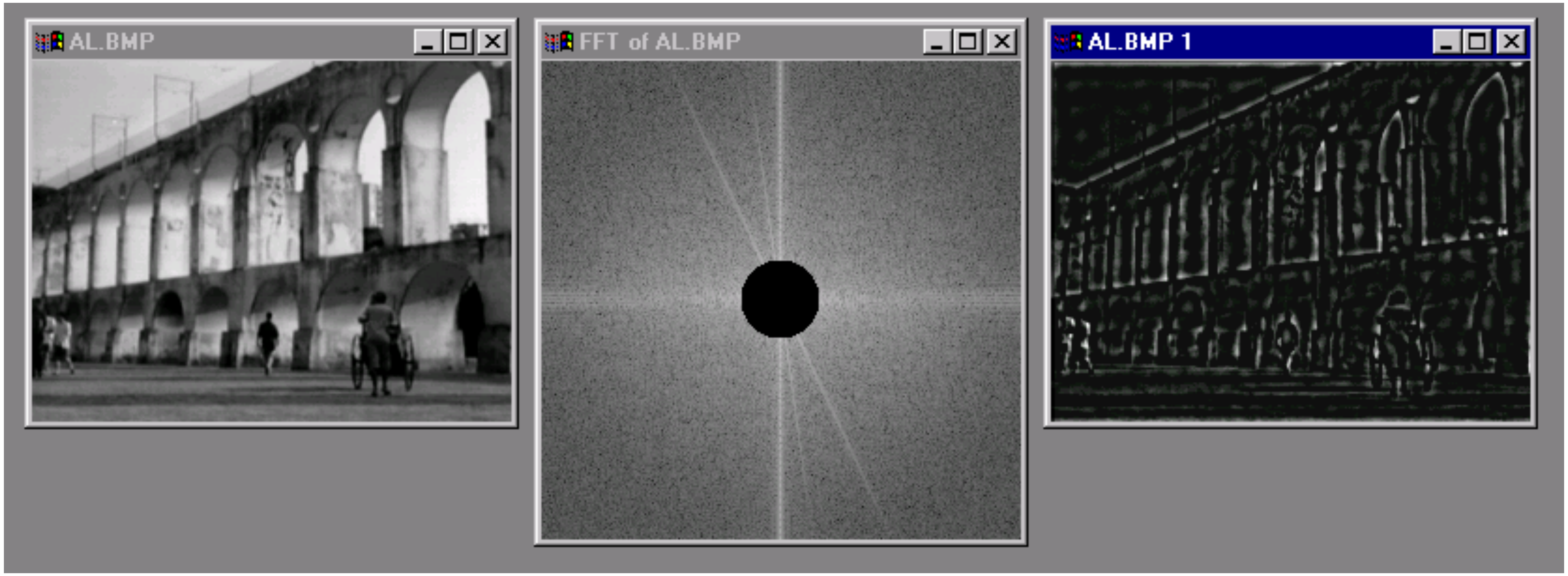


Démonstration

Manipulation de la FFT


FFT of ARCOSL.TGA
ARCOSL.TGA 1
FFT of ARCOSL.TGA
ARCOSL.TGA 1
FFT of ARCOSL.TGA
ARCOSL.TGA 1
FFT of ARCOSL.TGA
ARCOSL.TGA 1


ARCOSL.TGA
FFT of ARCOSL.TGA
ARCOSL.TGA 1

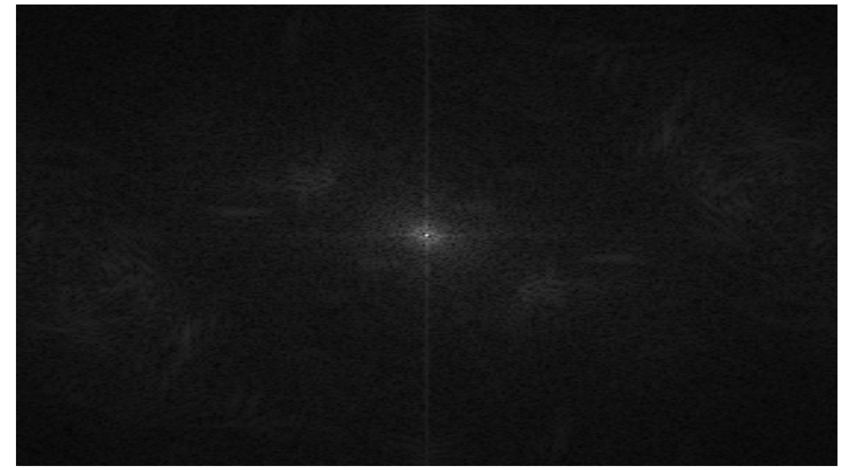
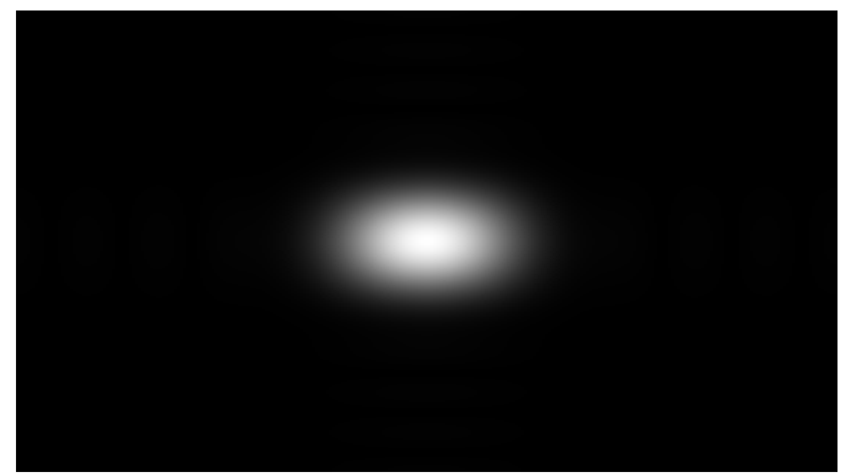
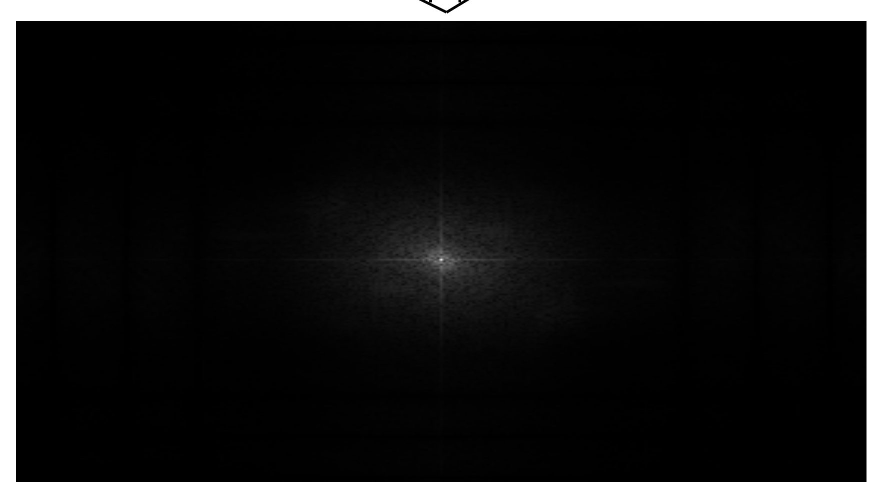

AL.BMP
FFT of AL.BMP
AL.BMP 1

Le théorème de la convolution

- La transformée de Fourier d'une convolution de deux fonctions est le produit de leur transformée de Fourier

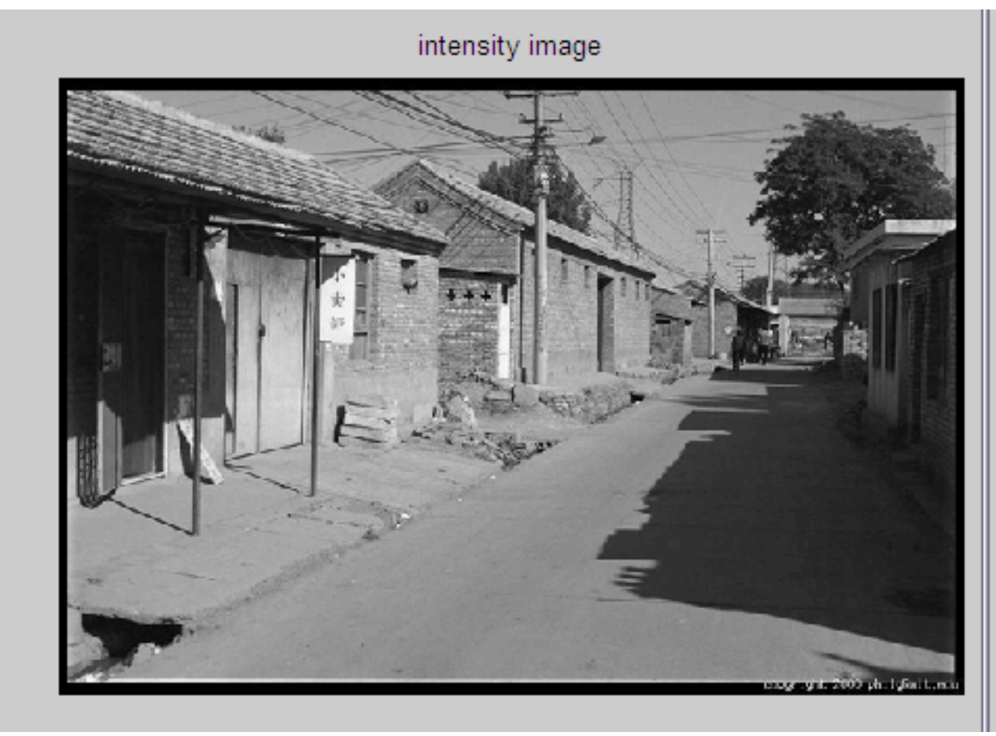
$$F(g * h) = F(g)F(h)$$

- La convolution dans le domaine spatial est équivalent à la multiplication dans le domaine spectral

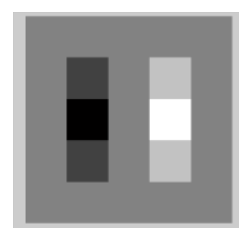
	Domaine spatial convolution	Domaine spectral (des fréquences) multiplication	
f(x,y)			|F(sx,sy)|
	*	$\times$	
h(x,y)			|H(sx,sy)|
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	
g(x,y)			|G(sx,sy)|

Filtrage spatial

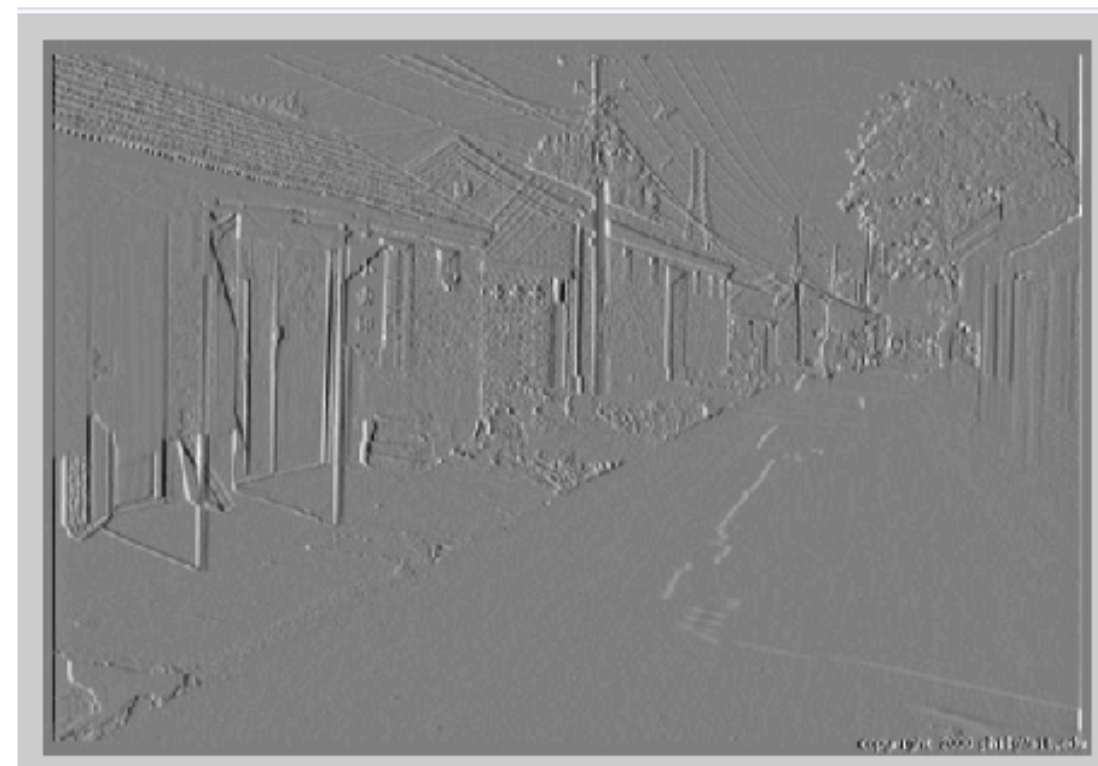
1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1



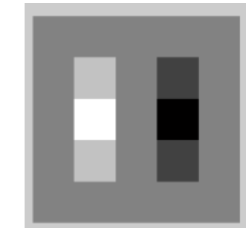
*



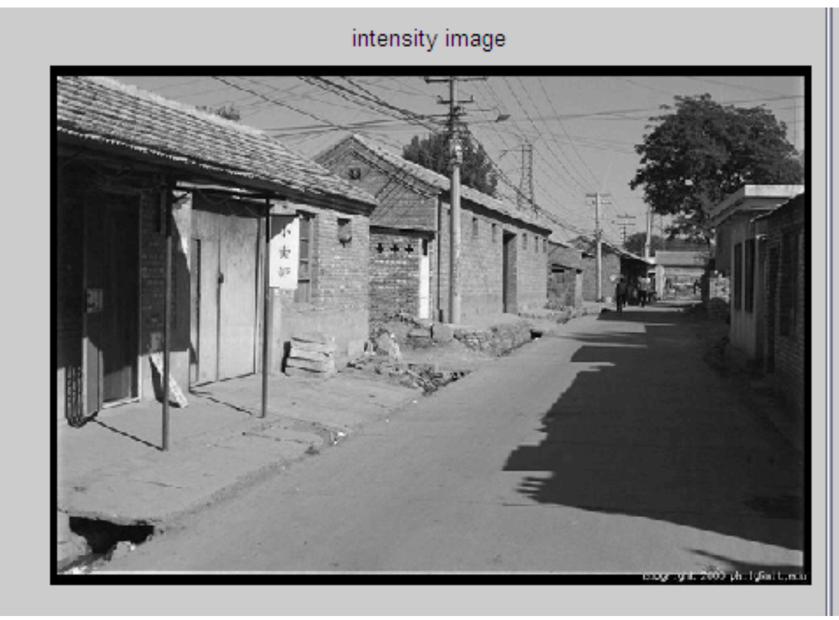
=



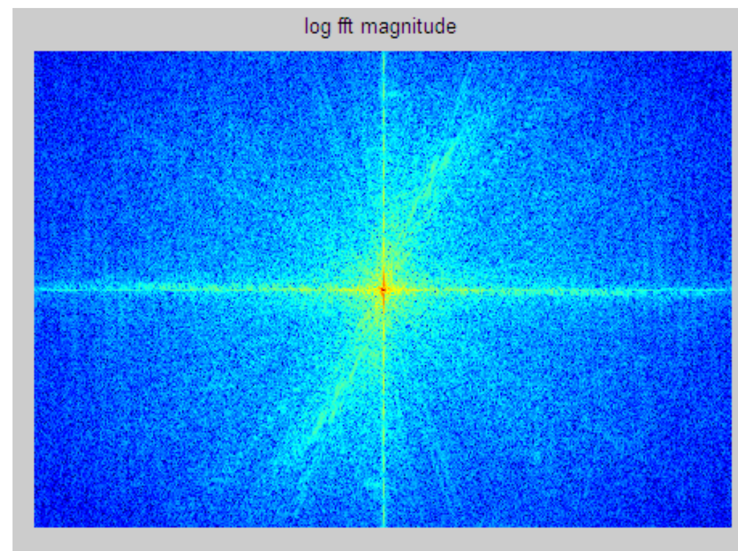
Filtrage spectral

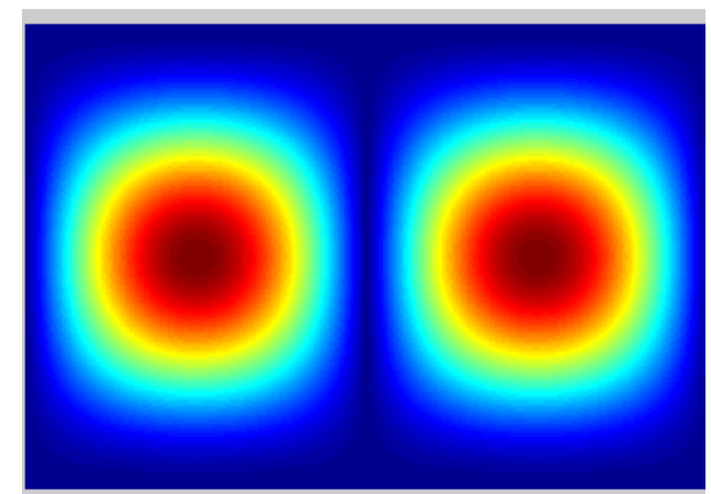


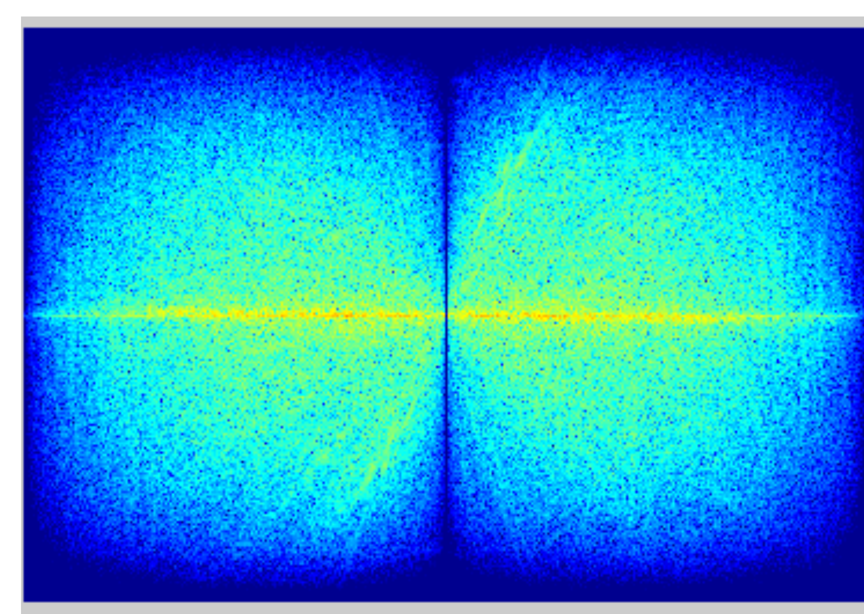
FFT



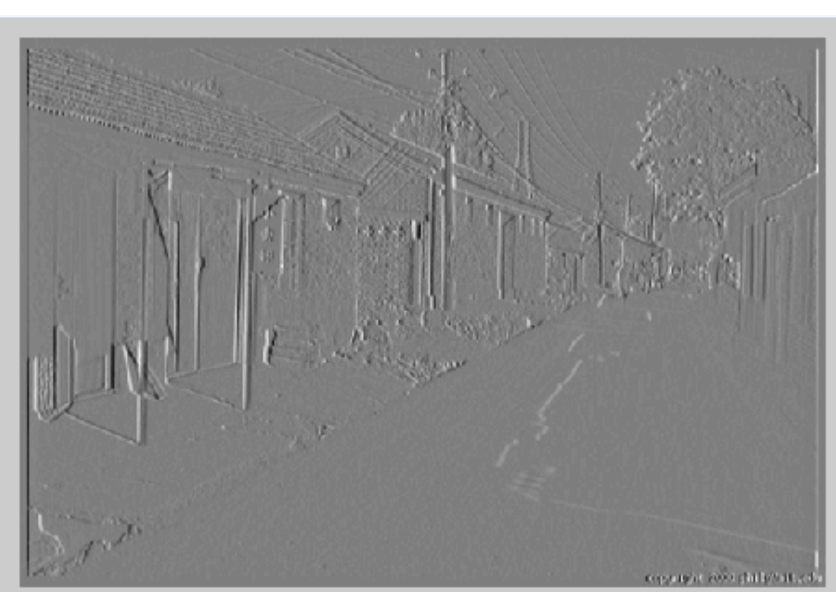
FFT





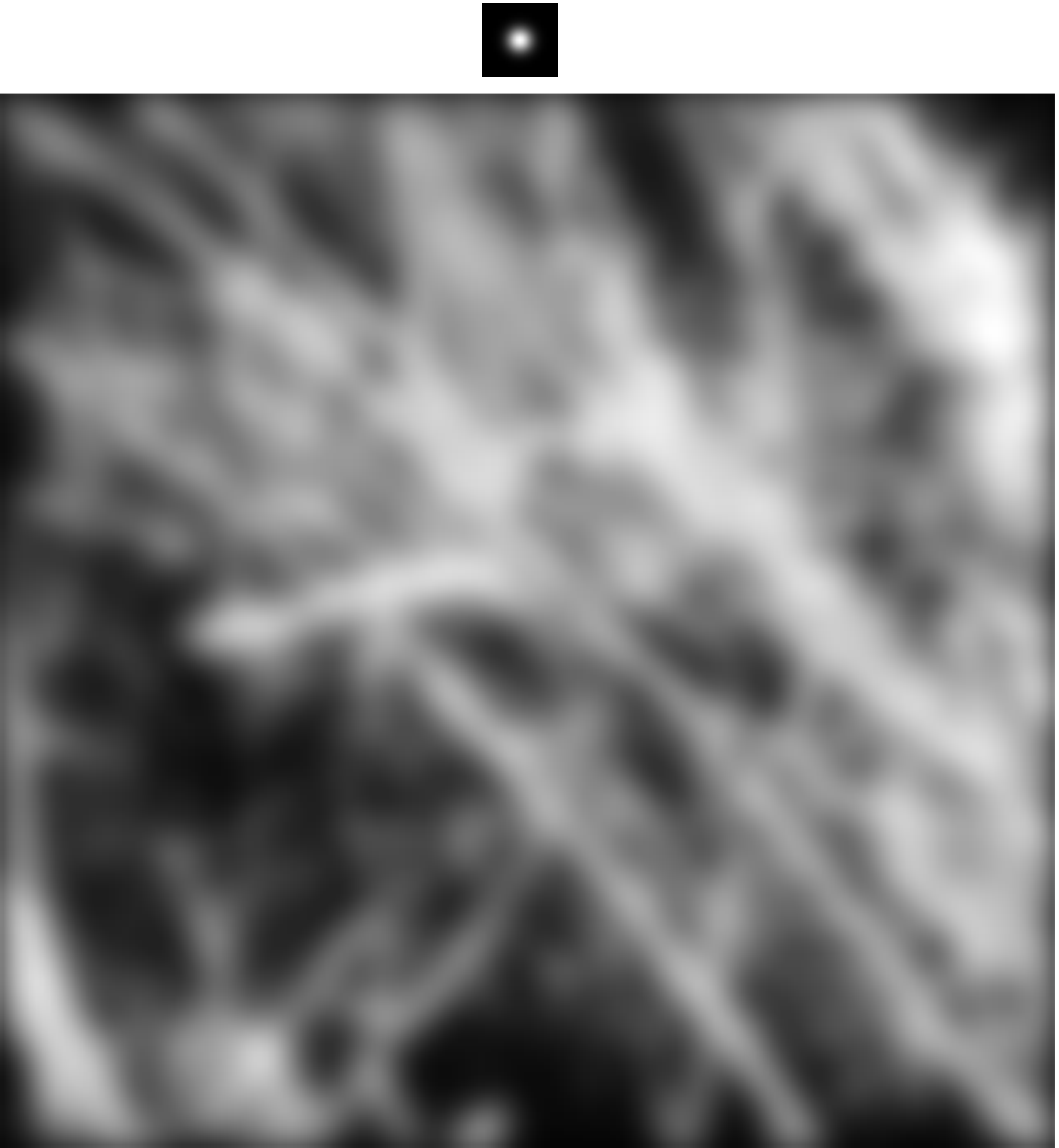


FFT inverse



Démonstration

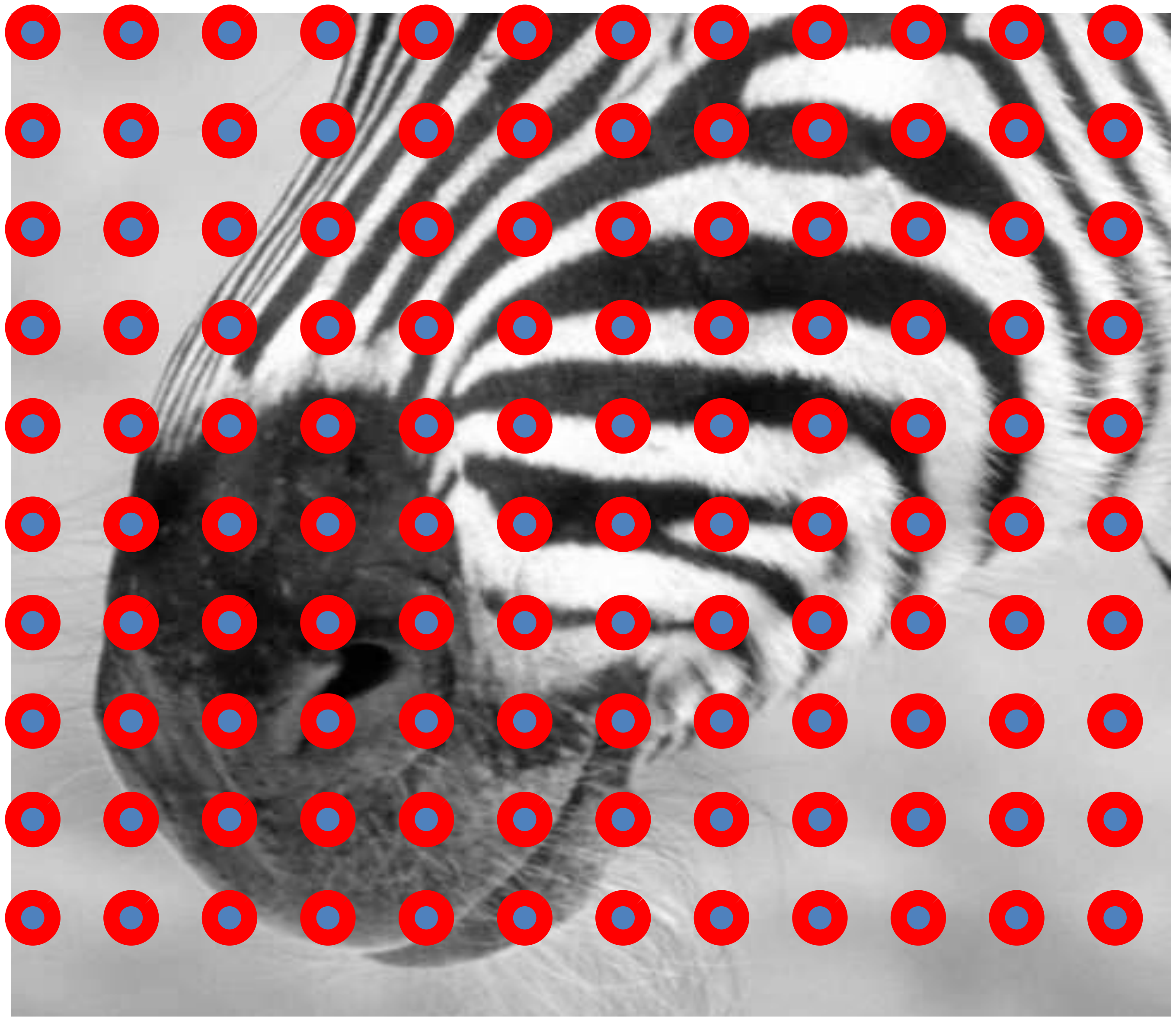
Filtrage spectral

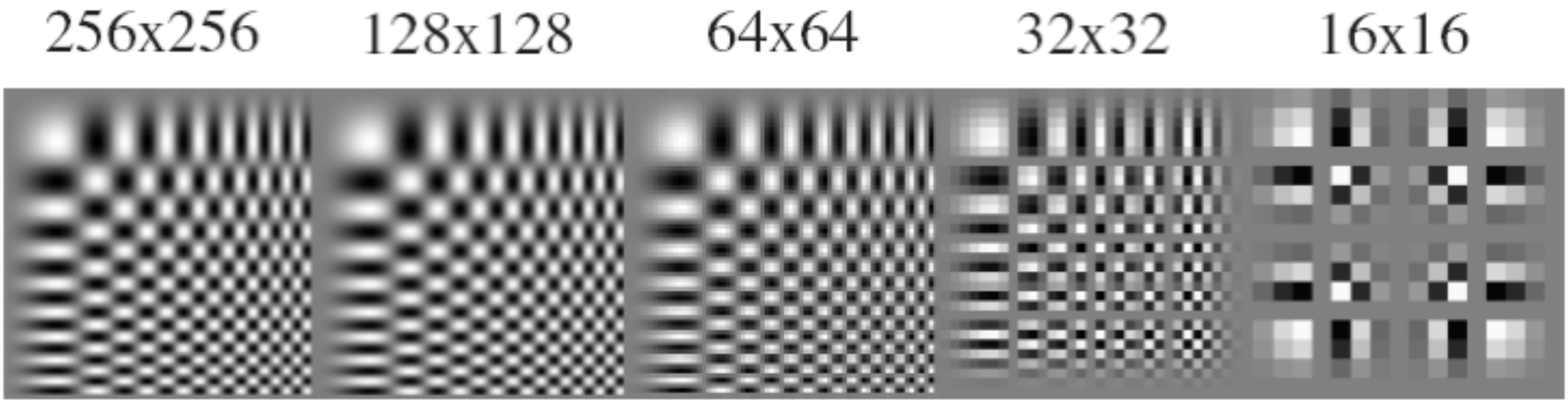


- Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible? Quelle est l'information perdue?

Image: http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/

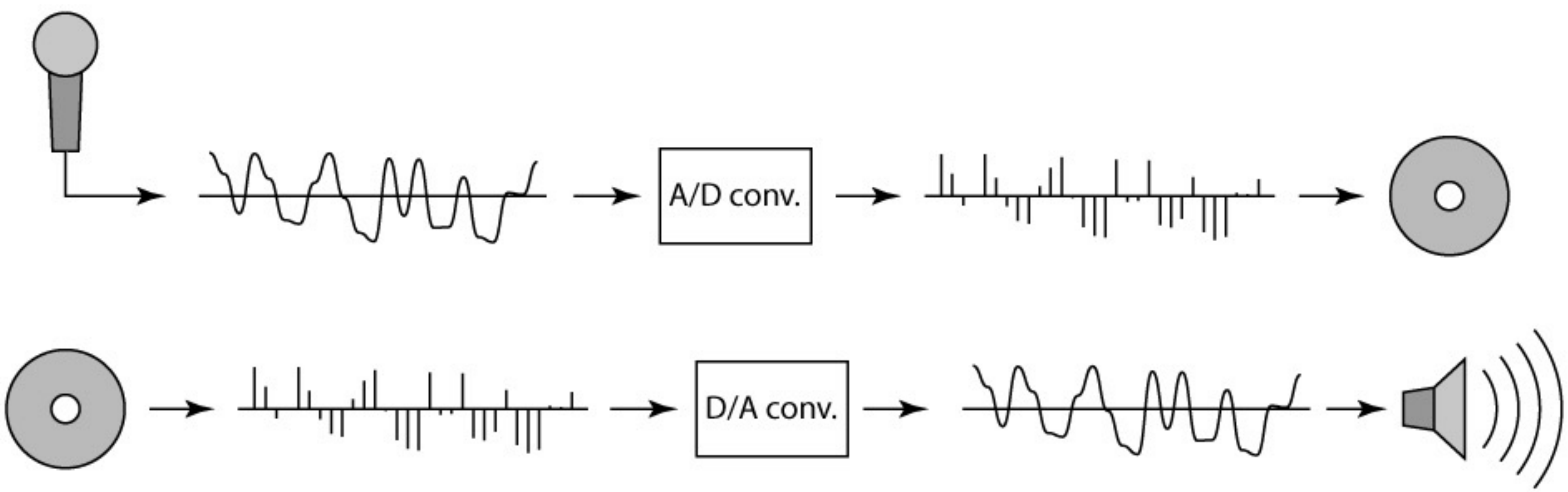
Réduction de taille d'un facteur 2




256x256
128x128
64x64
32x32
16x16

Exemple: 1D (audio)

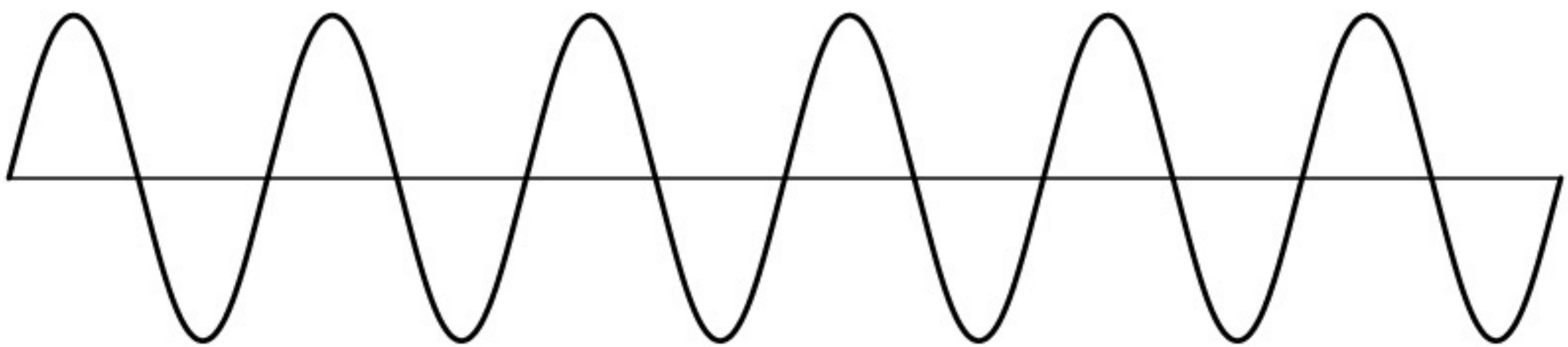
- Enregistrement: son -> échantillons numériques
- Écoute: échantillons numériques -> son
    - comment s’assurer que l’on peut “boucher les trous” correctement?



Source: S. Marschner

Échantillonnage et reconstruction

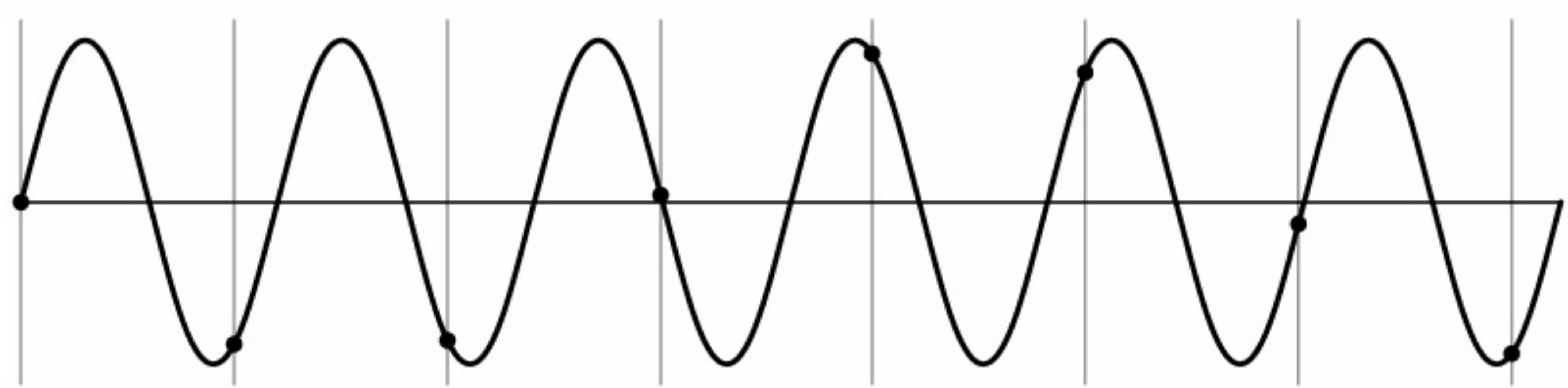
- Signal: sinus en 1-D



Source: S. Marschner

Échantillonnage et reconstruction

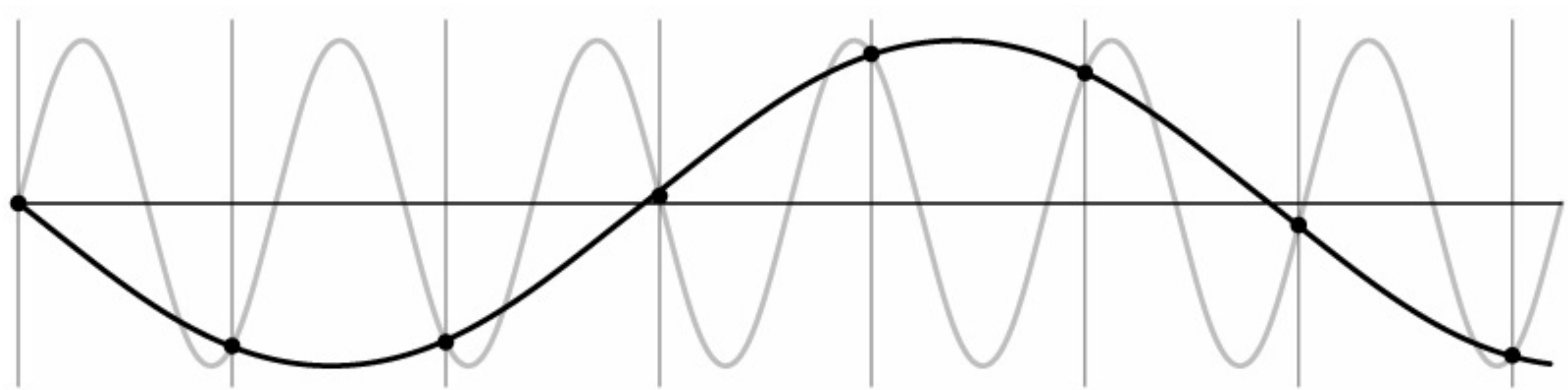
- On échantillonne à une certain fréquence
- Qu’arrive-t-il si on en “manque des bouts”?
  - Pas trop de surprise: on perd de l’information



Source: S. Marschner

Échantillonnage et reconstruction

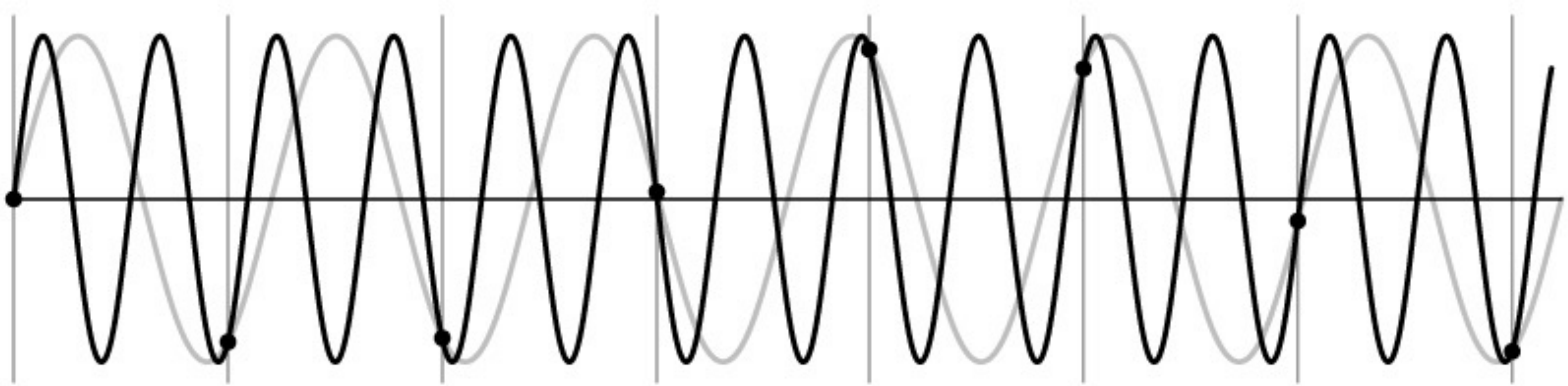
- Surprise: le signal reconstruit est confondu avec un *autre* signal, à fréquence plus faible



Source: S. Marschner

Recouvrement spectral

- Signaux de fréquences différentes “déguisés” dans notre signal original

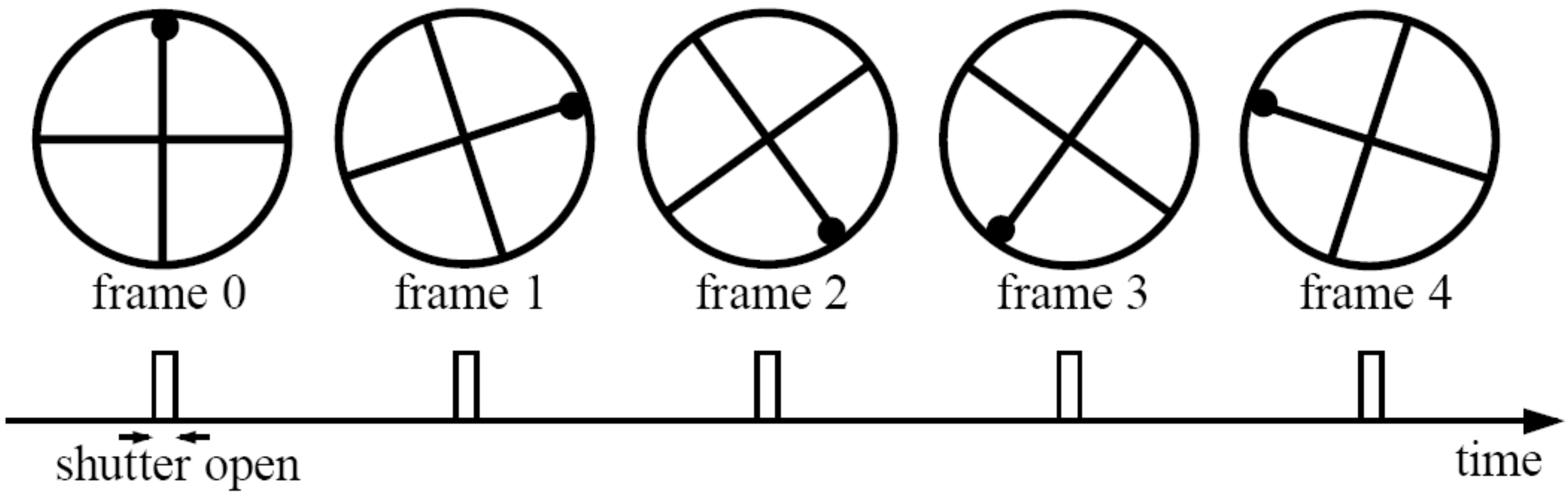


Source: S. Marschner

Recouvrement spectral

- L’échantillonnage peut être dangereux!
- Erreurs typiques:
    - “Roues tournant à l’envers”
    - “Jeu d’échec disparaissant à distance”
    - “Texture des vêtements à la télé”

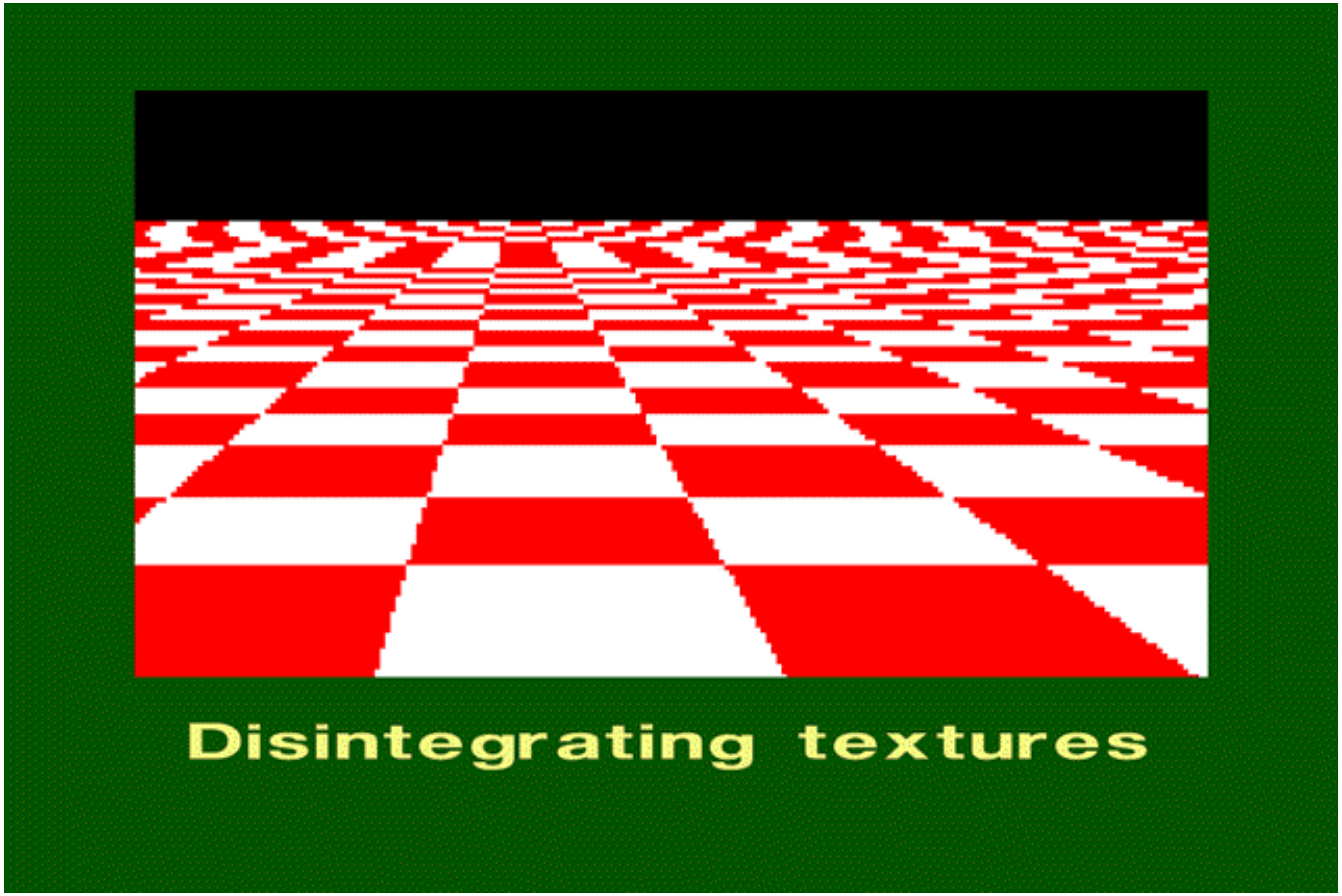
Recouvrement spectral dans les vidéos



http://www.youtube.com/watch?v=Y1yHMy0-4TM

Source: S. Seitz

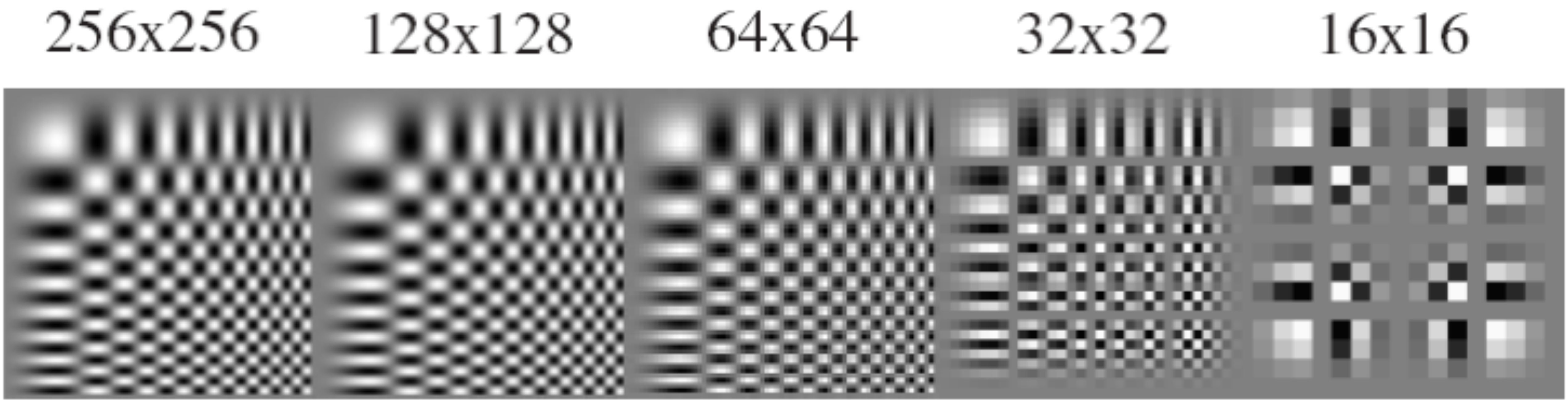
Recouvrement spectral en infographie



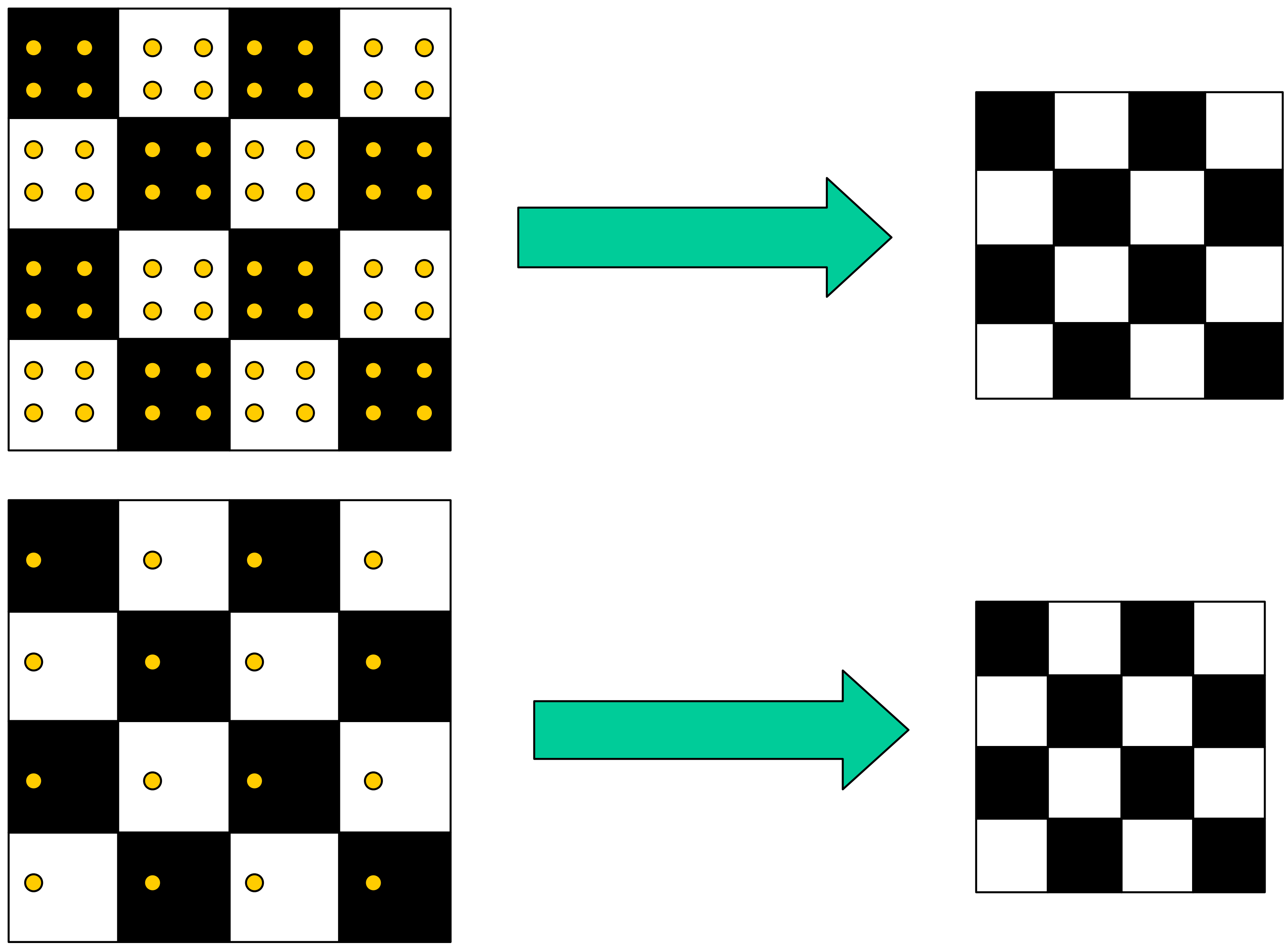
Source: A. Efros

À la télé….

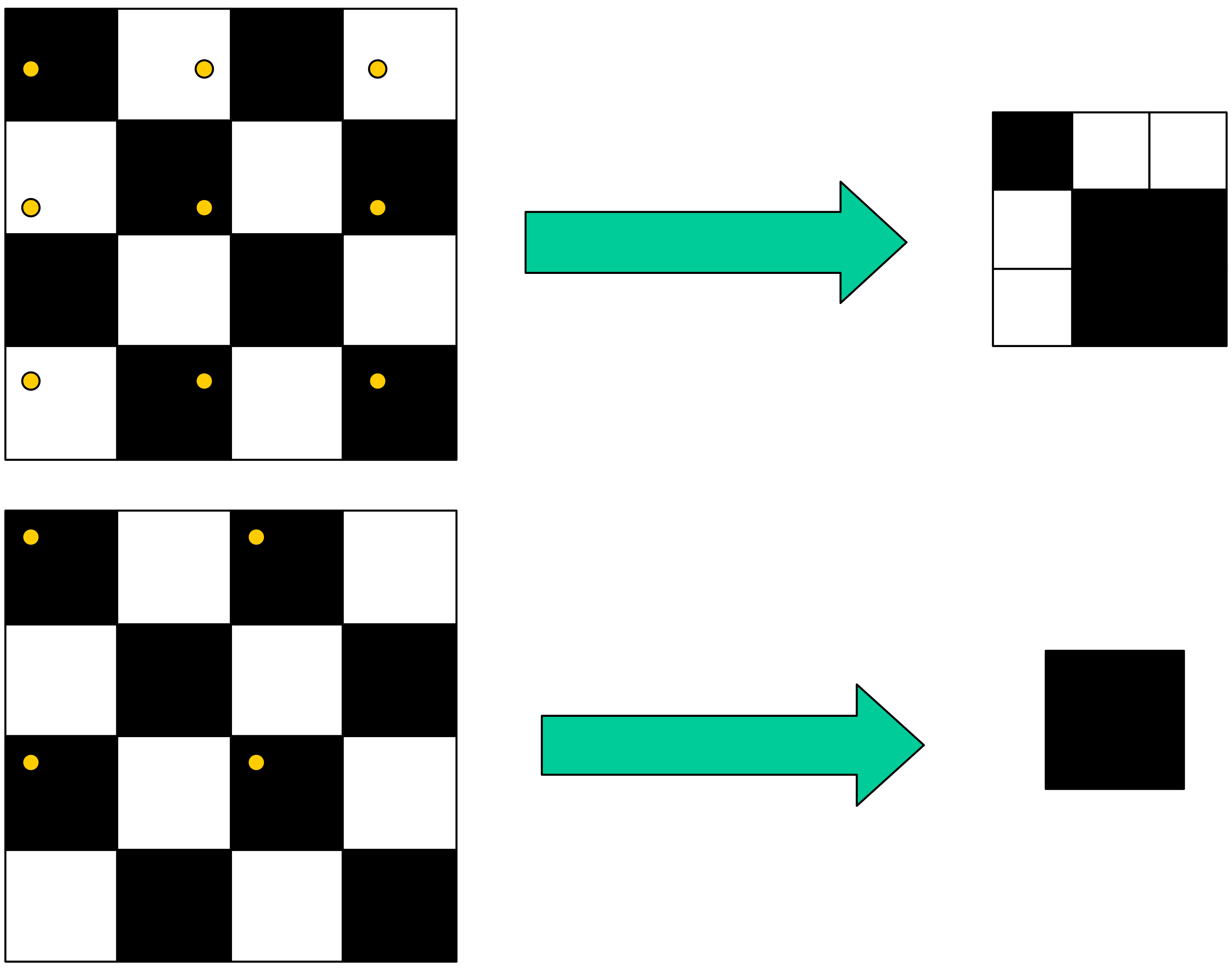
http://www.youtube.com/watch?v=jXEgnRWRJfg


256x256
128x128
64x64
32x32
16x16

Bon échantillonnage

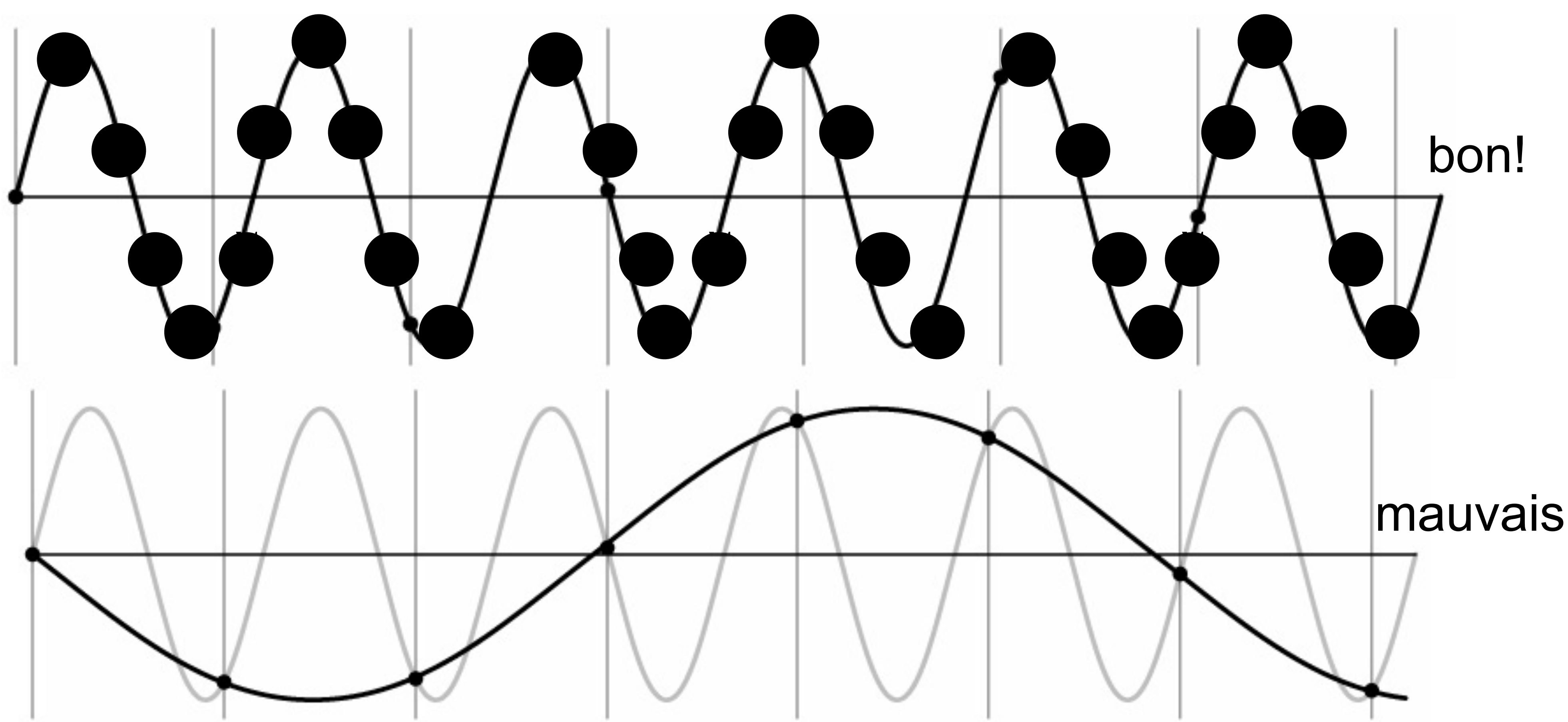


Mauvais échantillonnage = recouvrement!



Théorème d'échantillonnage Nyquist-Shannon

- La fréquence d'échantillonnage d'un signal devrait être ≥ 2 × fmax
  - fmax = fréquence maximale du signal
- Cette condition respectée garantit la reconstruction du signal original



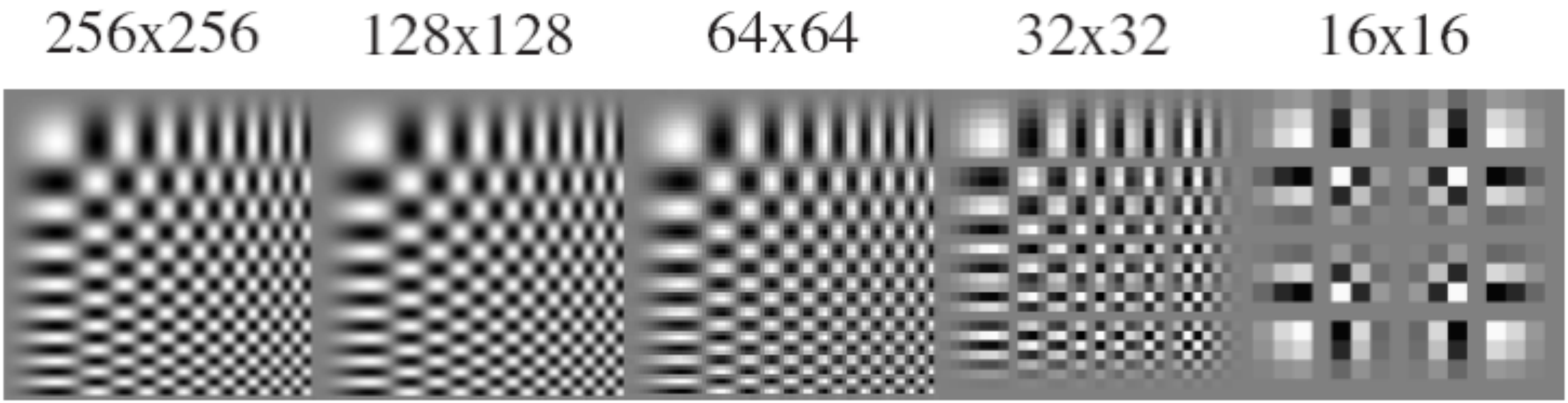
Anti-recouvrement (anti-aliasing)

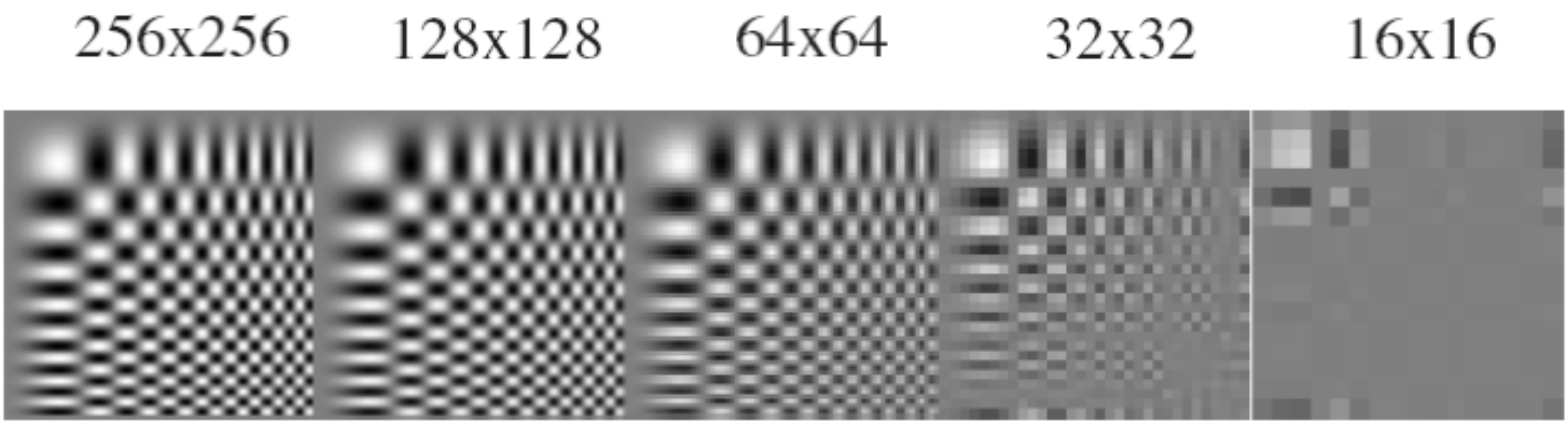
- Solutions:
  - Augmenter la fréquence d’échantillonnage!
  - Réduire les fréquences qui sont plus grandes que la moitié de la fréquence d’échantillonnage
    - Perte d’information
    - Mieux que le recouvrement spectral!

Démonstration

Recouvrement spectral

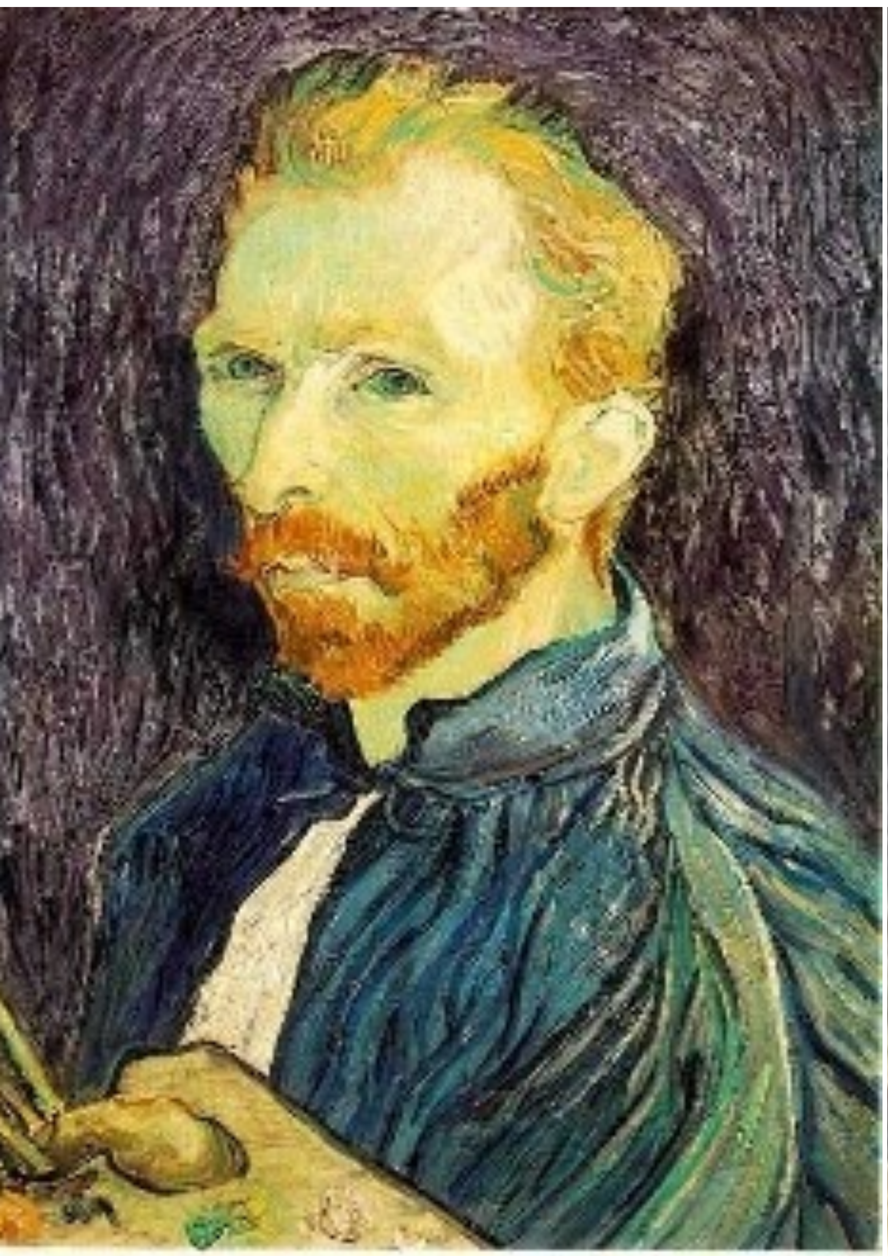
Recouvrement spectral





Forsyth and Ponce 2002

Échantillonner sans filtrage



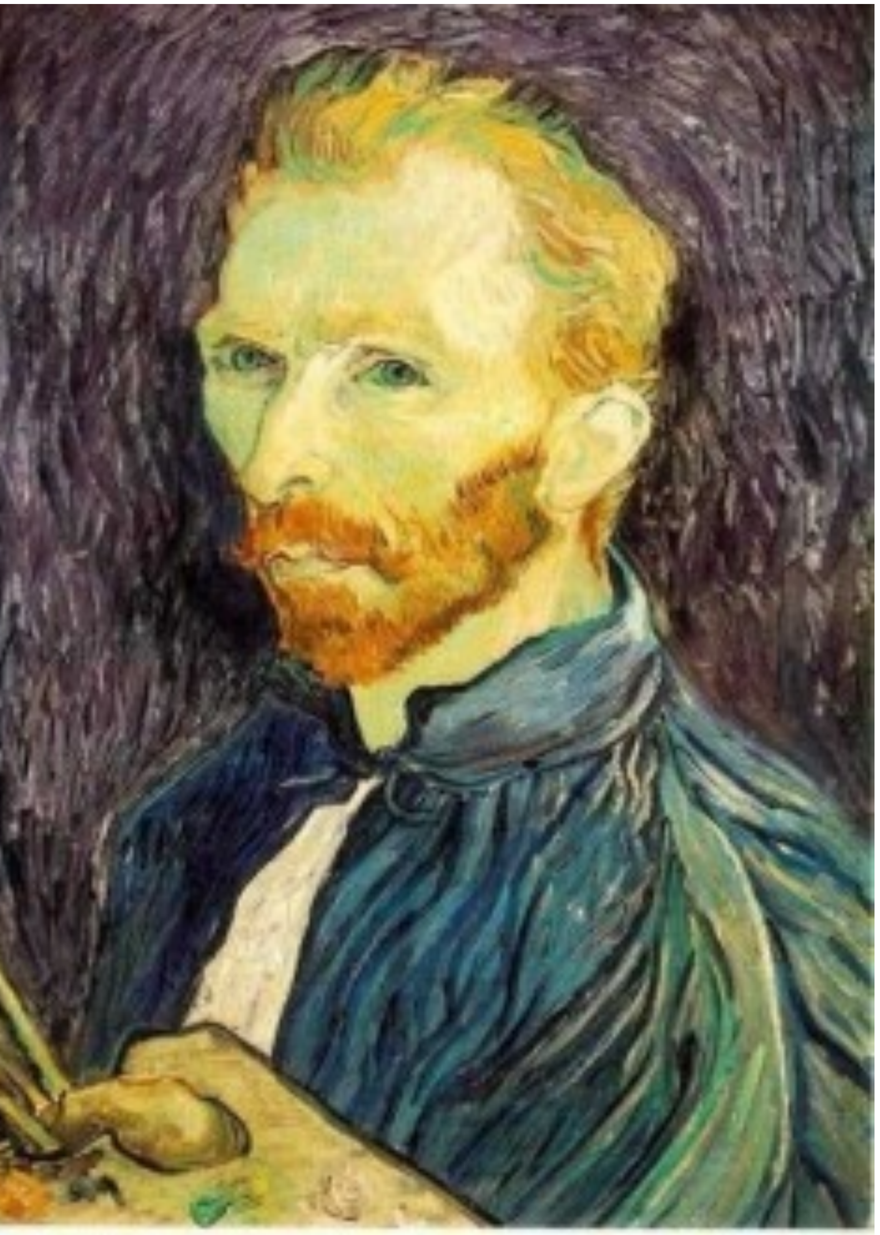
1/2

1/4 (2x zoom)

1/8 (4x zoom)

Slide by Steve Seitz

Échantillonner avec filtrage



Gaussian 1/2

G 1/4

G 1/8

Slide by Steve Seitz